This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

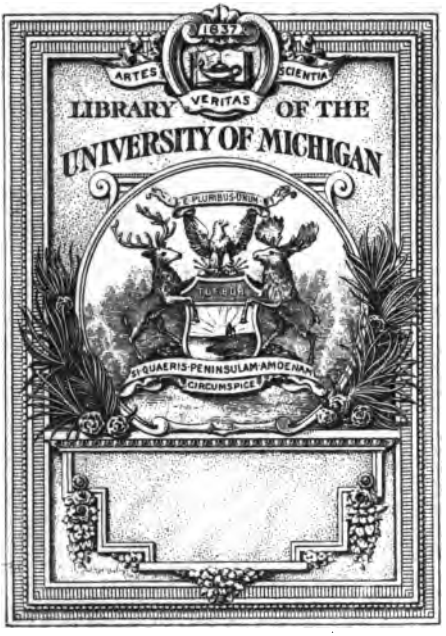
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

B 469463


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

4-6.3.7

Astron. Observ

Astronomical Observatory
QA
275
.H48

DIE AUSGLEICHUNGSRECHNUNG

40914

NACH DER

METHODE

DER

KLEINSTEN QUADRATE

MIT

ANWENDUNGEN

AUF DIE GEODÄSIE UND DIE THEORIE DER MESSINSTRUMENTE.

VON

Friedrich Robert HELMERT.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1872.

Rec. 4-16-38 Sim

VORREDE.

Dieses Buch habe ich zunächst in der Absicht geschrieben, es bei meinen Vorträgen über die Anwendungen der Methode der kleinsten Quadrate am Polytechnikum zu Aachen zu benutzen. Ich will damit meinen Zuhörern Gelegenheit bieten, die Behandlung von Beispielen bei einer sich an den Vortrag anschliessenden Darstellung in der nur durch Druck zu erreichenden compendiösen Form überblicken zu können. Es schien mir zweckmässig, den Beispielen die allgemeinen Formeln nebst deren Entwicklung beizufügen, einestheils um auch hie und da für denjenigen, welcher sich fortbilden will, etwas mehr zu geben, als im Vortrag zweckmässig ist, und anderntheils, weil selbst für den Geübteren eine Uebersicht der Formeln oft erwünscht wird. Ich hoffe dadurch zugleich für einen grössern Leserkreis etwas Brauchbares bearbeitet zu haben.

Was den Inhalt des Buches anlangt, so bemerke ich zu dem, was das „Inhaltsverzeichniss“ und die „Uebersicht der Beispiele“ darüber angeben, noch Folgendes. Weil ich, wie im Vorhergehenden bereits mitgetheilt, in erster Linie die Anwendungen, also die praktische Seite im Auge hatte, so habe ich nur mehr beiläufig der Beziehung zwischen Wahrscheinlichkeitsrechnung und Methode der kleinsten Quadrate gedacht, dagegen vielmehr die jüngere der beiden Darstellungsweisen der letztern durch Gauss hervorgehoben, weil sie bei einfacherem Calcül doch ausreichende Strenge und überdies eine grössere Allgemeinheit besitzt.

Die Unterscheidung der Hauptformen der Ausgleichungsaufgaben ist nach Gerling, jedoch sind noch zwei allgemeinere

Formen behandelt, wobei durch Erweiterung des Gauss'schen Algorithmus Endformeln von derselben Gestalt wie bei den einfachen Formen erzielt wurden, wenn dieselben auch im Wesentlichen nicht neu sein können.

Durch Einführung des Begriffes äquivalenter Beobachtungen glaube ich die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen durchsichtiger gemacht zu haben, namentlich für den Fall der Anwendung auf die Theorie der Triangulationen. Zugleich ergab sich aus diesem Begriffe eine neue Darstellung der Eigenschaften der Fehlerellipse, welche bekanntlich Herr von Andrae erfunden hat (Astr. Nachr. Band 47), die aber bisher nur in Beziehung zum Gauss'schen Fehlergesetz aufgefasst worden ist.*)

Die Entwicklungen sind mit Absicht in den ersten Abschnitten etwas breit gehalten, ebenso die Kenntniss der Determinantentheorie nicht vorausgesetzt. Die weniger entwickelten Lösungen sind nicht übergangen, um den vereinzelten Anwendungen zu entsprechen, für welche ein Studium der eleganteren und meist rationelleren Lösungen nicht am Platze ist.

Von Wichtigkeit erschien es mir, die Untersuchung der plausibelsten Beobachtungsfehler mehr zu betonen, als sonst wohl üblich in Lehrbüchern, doch ist die gegebne Darstellung weit entfernt, eine abgeschlossne Untersuchung sein zu wollen. Die Unterscheidung wahrer und plausibler Fehler ist allenthalben möglichst streng durchgeführt und demgemäss auch bei der Untersuchung des Vertheilungsgesetzes der plausibelsten Fehler zur Vergleichung nicht ein wahrer Fehler benutzt (etwa der mittlere oder wahrscheinliche) — wie z. B. von Enke im Berl. Jahrb. 1834 S. 287 geschehen — sondern ebenfalls ein plausibelster Fehler.

Um recht ersichtlich zu machen, welcher erhebliche Unterschied zwischen zwei Anwendungen der Methode der kleinsten Quadrate stattfinden kann bezüglich der Bedeutung

---

*) Vergl. über die Fehlerellipse auch die S. 236 citirte Abhandlung des Verfassers.

der Resultate, habe ich auch die Anwendung derselben zu interpolatorischen Zwecken mit aufgenommen.

Abgekürzte Ausgleichungsmethoden, welche oft die strenge Ausgleichung zweckmässig zu ersetzen geeignet sind, sind nicht behandelt worden, weil dies zu sehr in Spezialitäten geführt hätte. Es muss gewiss auch dem Studium dieser Methoden dasjenige der strengen Theorie vorausgehen, denn erst die Kenntniss der letzteren befähigt zur Beurtheilung des Werthes der ersteren. Der Kenner der strengen Methoden wird ferner oft im Stande sein, durch passende Anordnung der Beobachtungen die strenge Ausgleichung so einfach zu gestalten, dass die Anwendung eines abgekürzten Verfahrens überflüssig ist.

Ich kann nicht schliessen, ohne vorher meinem verehrten Collegen, Herrn Dr. K. Hattendorff für die freundschaftliche Unterstützung, welche derselbe mir bei der vorletzten Revision der Druckbogen zu Theil werden liess, auch an dieser Stelle meinen herzlichen Dank auszudrücken.

Aachen, den 10. Februar 1872.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniss.

I. Abschnitt.

Seite

§. 1. Ueberschüssige Messungen. Grobe Fehler. Regelmässige und zufällige Beobachtungsfehler. Aufgabe der Ausgleichungsrechnung 1

§. 2. Die zufälligen Beobachtungsfehler. Fehlergesetz. Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Beobachtungsfehlers. Erfahrungsmässige Form des Fehlergesetzes; Annahme dreier verschiedener Formen 5

§. 3. Maasse für die Genauigkeit einer Beobachtungsreihe: Durchschnittsfehler, mittlerer zu befürchtender Fehler, wahrscheinlicher Fehler 10

Relationen zwischen denselben für die drei Annahmen über $\varphi(\varepsilon)$ 14

Maass der Präcision bei der dritten Form 19

§. 4. Bestimmung des durchschnittlichen und des mittlern zu befürchtenden Fehlers aus einer endlichen Anzahl Fehler ε. 20

Mittlerer zu befürchtender Fehler dieser Bestimmungen. Die directe Ermittlung des mittlern Fehlers μ aus der Quadratsumme der ε ist die genaueste Bestimmungsweise. 21

Directe Ermittlung des wahrscheinlichen Fehlers 26

§. 5. Uebersicht der verschiedenen Formen der Ausgleichungsaufgaben. Plausibelste Werthe der Unbekannten und der Verbesserungen der auszugleichenden Beobachtungswerthe; Fehlergleichungen 27

§. 6. Mittlerer Fehler einer Function unabhängig von einander bestimmter Grössen 42

Zusammensetzung des mittlern Fehlers aus den mittlern Beträgen der Einwirkung mehrerer unabhängiger Fehlerursachen 54

II. Abschnitt.

§. 7. Ausgleichung directer Beobachtungen gleicher Genauigkeit nach dem Satze vom arithmetischen Mittel. Rechnungscontrolle. Genauigkeit des arithmetischen Mittels . . 56

Seite

Berechnung des mittlern und des durchschnittlichen Beobachtungsfehlers aus den plausibelsten Beobachtungsfehlern . . 57
Mittlere und durchschnittliche Abweichung vom Mittel . . 58
§. 8. Ausgleichung directer Beobachtungen ungleicher Genauigkeit nach dem Satze vom arithmetischen Mittel. Einführung des Begriffs Gewicht. Gewichtseinheit 58
Berechnung der durchschnittlichen und mittlern Abweichung vom Mittel 61
Berechnung des durchschnittlichen und mittlern Beobachtungsfehlers 62
Rechnungscontrollformeln 62
Mittlerer Fehler des Mittels berechnet aus den plausibelsten Fehlern der Beobachtungen einerseits; aus den mittlern Fehlern der Beobachtungen andrerseits 62
§. 9. Ausgleichung directer Beobachtungen gleicher Genauigkeit, welche Vielfache einer Unbekannten sind, nach dem Satze vom arithmetischen Mittel. Mittlerer Fehler der Unbekannten, mittlerer und durchschnittlicher Beobachtungsfehler. Controllformeln 65
§. 10. Uebergang von dem Satze vom arithmetischen Mittel zur Methode der kleinsten Quadrate. Fehlergesetz, für welches das arithmetische Mittel gleichgenauer directer Beobachtungen den wahrscheinlichsten Werth giebt 72
Verallgemeinerung der Bedeutung der Gewichtszahlen für heterogene Beobachtungsgrössen 77

III. Abschnitt.

§. 11. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen gleicher Genauigkeit nach der Methode der kleinsten Quadrate . . 78
Berechnung der Gewichte der plausibelsten Werthe der Unbekannten mit Hülfe der unbestimmten Auflösung der Normalgleichungen 81
§. 12. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen gleicher Genauigkeit nach der Bedingung, dass die mittlern Fehler der Unbekannten möglichst klein werden 89
Allgemeine und historische Bemerkungen 93
§. 13. Weitere Entwicklung der Formeln für die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen. Gewichtsgleichungen. Algorithmus von Gauss 96
Reducirte Normalgleichungen und explicite Darstellung der Unbekannten und reciproken Gewichte als Functionen der Coefficienten derselben 101
§. 14. Rechnungscontrollen: durch Summengleichungen, ... 104
durch doppelte Berechnung von $[\lambda\lambda]$, ... 106
noch andere Form der Controlle 108

Seite

§. 15. Berechnung des mittlern Fehlers und des Durchschnittsfehlers der Beobachtungen aus den übrigbleibenden Fehlern bei der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen gleicher Genauigkeit 108
Mittlerer Fehler in der Bestimmung des mittlern Beobachtungsfehlers 111
§. 16. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen ungleicher Genauigkeit 113
§. 17. Zusammenstellung der Formeln für die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen 115
§. 18. Nichtlineare Relationen. Einführung von Näherungswerthen. 131
Indirecte Auflösung der Normalgleichungen nach Jacobi und Gauss 132
Praktische Hülfsmittel zur numerischen Rechnung . 136
§. 19. Mittlerer Fehler einer Function von Grössen, die durch vermittelnde Beobachtung gefunden worden sind 137
Bemerkung für den Fall, wo in der Function noch directe Beobachtungen vorkommen 142
§. 20. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen bei einer besonderen Form der Fehlergleichungen 143
Anderes Verfahren 145
§. 21. Gleichwerthige und vollständig äquivalente Beobachtungsreihen 164
Unvollständige Bestimmung der Unbekannten durch die Ausgleichung 169

IV. Abschnitt.

§. 22. Ausgleichung bedingter Beobachtungen durch Reduction auf vermittelnde 171
Directe (symmetrische) Auflösung. 172
Mittlerer Fehler einer Function der Beobachtungswerthe . 174
Soll nach vermittelnden oder bedingten Beobachtungen ausgeglichen werden? 179
§. 23. Formelübersicht für die Ausgleichung bedingter Beobachtungeu 180
§. 24. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen, von deren Unbekannten Bedingungsgleichungen zu erfüllen sind, durch Reduction auf vermittelnde Beobachtungen ohne dergleichen. 195
Directes Verfahren 196
§. 25. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen, zwischen deren Unbekannten Bedingungsgleichungen bestehen, durch successive Ausgleichung in 2 Theilen . 202
Mittlerer Fehler einer Function der Unbekannten 206

Seite

Verschiedene Berechnungsweisen des mittlern Beobachtungsfehlers 207
Besondere Fälle der Aufgabe 212
§. 26. Ausgleichung von Aufgaben der Form V §. 5. Indirecte Lösung 215
Directe Lösung; mittlerer Fehler einer Function der Unbekannten und der ausgeglichenen Beobachtungswerthe 217
§. 27. Partiell äquivalente Beobachtungsreihen in Bezug auf einen Theil der Unbekannten oder Functionen derselben resp. der nach vermittelnden Beobachtungen ausgeglichenen Beobachtungswerthe 222
Besonders einfache Form des äquivalenten Systems bei 2 Functionen 225
Erweiterung für beliebige Form der Ausgleichungsaufgabe und heterogene Beobachtungsgrössen 229
§. 28. Fehlerellipsen 231

V. Abschnitt.

§. 29. Untersuchung der Fehler einer Beobachtungsreihe. Einfluss regelmässiger Fehlerursachen auf die Vertheilung übrigbleibender Fehler λ. 256
Verschiedene solche Ursachen 261
§. 30. Untersuchung der Fehler zur Feststellung der wichtigsten Eigenschaften des Vertheilungsgesetzes, insbesondere bezüglich der Einwirkung regelmässiger Fehlerursachen . . . 263
Bemerkung zu einem Einwurf gegen die Methode der kleinsten Quadrate 272
Prüfung der Gewichtsannahme 273
§. 31. Ermittlung regelmässiger Fehlerursachen 273

VI. Abschnitt.

§. 32. Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf näherungsweise Darstellung gegebener Functionen . . . 278
Desgleichen auf Herstellung von Interpolationsformeln in Gestalt von Potenzreihen. 280
Desgleichen bei Anwendung periodischer Reihen 282

VII. Abschnitt.

Verschiedene Anwendungen. 301

Uebersicht der Beispiele und Anwendungen.

Ueber das Nivelliren und Distanzmessen.

Seite

Beispiel 24. I. Ueber den mittlern Fehler des Nivellirens . . . 301
Methode zur Ermittlung der Genauigkeit des Zielens . . 263
Beispiel 24. II. Näherungsrelation zwischen den mittlern Fehlerquadraten von Höhenunterschieden, die mit demselben Instrument ermittelt worden sind 307
Beispiel 24. III. Ausgleichung geometrischer Nivellements . . . 309
Constante Fehler in geometrischen Nivellements 260
Beispiel 1. Ungleichheit der Fernrohr-Ringhalbmesser an Nivellirinstrumenten mit umlegbarem Fernrohr 29. 58. 63
Beispiel 23. Ueber die Reductionsformel des Stampfer'schen Nivellirinstruments 297
Beispiel 8. Constanten des Reichenbach'schen Distanzmessers 67. 143

Ueber das Horizontalwinkelmessen und Trianguliren.

Beispiel 7. Zusammensetzung des mittlern Fehlers einer Richtungsbeobachtung 54
Mittlerer Fehler der Winkelbeobachtungen 55
Vergleichung von Winkel- und Satzbeobachtungen . . 55. 320
Beispiel 25. Verschiedene Methoden zur Horizontalwinkelmessung mit Theodoliten 312
Beispiel 2. 2*. Ausgleichung von Winkelmessungen einer Station 31. 86. 122. 141
Beispiel 9. Ausgleichung von Richtungsbeobachtungen einer Station 146
Desgl. nach Hansen 153
Desgl. nach der Näherungsmethode der Ord. Survey 154. 171
Beispiel 27. II. Bestimmung von Theilungsfehlern an Vollkreisen 333
Beispiel 19. Nachweis aus Beobachtungen, dass periodische Theilungsfehler vorhanden sein müssen 275
Beispiel 28. Bestimmung von Excentricität und Theilungsfehlern 341
Beispiel 6. In einem Dreieck sind 1 Seite und 2 Winkel gemessen 50. 238
Beispiel 3. 3*. In einem Dreieck sind 3 Winkel gemessen . 38. 182
Beispiel 16. Desgl., ausserdem eine Seite 226. 229
Beispiel 11. In einem Dreieck sind 2 Seiten und 2 Winkel gemessen 184
Beispiel 26. Ausgleichung eines trigonometrischen Netzes . . . 323
Vergl. hierzu auch: 27. 152. 258. 261. 264. 268. 274

Seite

Beispiel 12. Ausgleichung eines Fünfecks 27. 185. 268. 271
Beispiel 18. Ausgleichung eines Vierecks (fingirt) 240
Beispiel 17. Besonderer Fall eines Kranzsystems 230
Beispiel 10. Ausgleichung bei Pothenot'scher Bestimmung eines Punktes 158. 166. 236

Ueber das Längenmessen.

Beispiel 4. Der Fehler der Längenmessung 44
Ermittlung des Fehlers der Kettenmessung 263
Beispiel 27. I. Ermittlung von relativen Theilungsfehlern bei Längentheilungen 333

Verschiedene Beispiele.

Beispiel 5. Vergleichung der Genauigkeit zweier Wägungsverfahren 47
Beispiel 21. Formel für die periodischen Aenderungen der täglichen Temperaturamplitude von Brüssel während eines Jahres . 282
Beispiel 22. Formel für die periodischen Aenderungen der Axenneigung eines Passageninstruments 287
Beispiel 20. Darstellung von $\sqrt{1+x}$ durch $1 + \alpha x$ 279

Ein fingirtes Beispiel in verschiedener Auflösung:
Beispiel 13. 195
Beispiel 13*. 199
Beispiel 13†. 209
Beispiel 14. 213
Beispiel 15. 220

I. Abschnitt.

§. 1.

Ueberschüssige Messungen. Grobe Fehler. Regelmässige und zufällige Beobachtungsfehler. Aufgabe der Ausgleichungsrechnung.

I. Ueberschüssige Messungen. Es ist eine als zweckmässig allgemein anerkannte Vorsicht, sich auf das Ergebniss einer Messung (Beobachtung) nicht eher zu verlassen, als bis es einer Controlle durch andere, sogenannte überschüssige Messungen unterworfen worden ist und dieser Genüge geleistet hat. Man erzielt die Controlle entweder durch wiederholte Messungen derselben Grösse oder durch Messung anderer Grössen, die mit jener in einer mathematisch darstellbaren Beziehung stehen. So controllirt man einen Winkel eines Dreiecks immer durch Messung der beiden anderen, indem die theoretische Summe der drei Winkel bekannt ist.

Zeigt sich eine Nichtübereinstimmung zwischen den wiederholten Messungen einer Grösse, widersprechen die Messungen mehrerer Grössen den zwischen diesen gegebenen Relationen, so sind einzelne oder sämmtliche Messungsergebnisse mit Fehlern behaftet.

II. Grobe Fehler. Diese Irrthümer werden grobe Fehler genannt, wenn sie vielmal grösser sind, als unter den vorliegenden Verhältnissen erwartet werden kann. Messen wir z. B. mit einem Horizontalwinkelmesser, welcher noch 5 Bogensecunden erkennen lässt, die drei Winkel eines ebenen Dreiecks und erhalten als Winkelsumme nahezu $179^0\,59'$ anstatt $180^0\,0'$, so ist ein grober Fehler vorgekommen.

In vielen Fällen, sowohl im gewöhnlichen Leben als in der feinen Messkunst, haben die überschüssigen Messungen nur den Zweck, vor groben Fehlern zu schützen. War es z. B. nicht möglich die Basis eines trigonometrischen Netzes mehr als ein Mal scharf zu messen, so kann man einem groben Versehen, vielleicht wegen Verzählens um eine Messstange, vorbeugen durch eine erneute Messung mit Messstäben oder einer Messkette. Oder ist ein wichtiger trigonometrischer Punkt nur als Spitze eines Dreiecks bestimmt, in welchem die Winkel an beiden gegebenen Punkten gemessen wurden, so ist es gut, den dritten Dreieckswinkel wenigstens soweit angenähert richtig direct zu ermitteln, dass die Grade und Minuten aller drei Winkel sich controlliren lassen.

Wir sehen von groben Fehlern in dieser Schrift ab, da sie durch Aufmerksamkeit vermieden, mindestens nachträglich berichtigt werden können. Anders ist es mit den kleinen Beobachtungsfehlern, die man bezeichnet als:

III. Regelmässige und zufällige Beobachtungsfehler. Insbesondere die letzteren sind Ursache, dass eine völlige Uebereinstimmung der sich controllirenden Messungen in der Regel nicht eintritt. Mit diesen Fehlern macht uns am besten ein Beispiel näher bekannt.

Mittelst eines Polarplanimeters werde eine den Planimeterpol nicht einschliessende Fläche ein Mal in möglichster Nähe des Poles zur Fläche, alsdann in möglichster Entfernung der beiden letzten, gemessen; so sind es namentlich folgende drei Ursachen, die eine Abweichung der beiden Ergebnisse bedingen:

a) Kleine unvermeidliche Abweichungen des Fahrstiftes von dem zu befahrenden Contour.
b) Unregelmässiges Wälzen der Rolle, namentlich in Folge kleiner Unebenheiten der Unterlage.
c) Unvollkommene Justirung des Instruments, also Vorhandensein von Instrumentalfehlern.

Unter den letzteren kommt insbesondere eine Abweichung von dem Parallelismus zwischen der Rollenaxe und der Geraden durch Fahrstift und gemeinsamen Drehpunkt der Planimeterarme in Betracht. Aber sowohl dieser wie in

der Regel auch alle andern Instrumentalfehler können auf ein verschwindendes Maass reducirt werden, nicht so dagegen die beiden ersten Fehlerursachen selbst bei grösster Aufmerksamkeit und sorgfältigster Glättung der Unterlage und Rollenperipherie. a) und b) sind daher Ursachen unvermeidlicher Fehler, *c*) aber ist Ursache von im Allgemeinen vermeidlichen Fehlern.

Sie unterscheiden sich aber auch noch in anderer Beziehung: Es werden nämlich die beiden ersten Ursachen bei wiederholtem Umfahren der Fläche immer andere Fehler des Resultats erzeugen, denn die Unregelmässigkeiten im Umfahren des Contours und in der Regel auch in dem Wälzen der Rolle sind bei jedem neuen Umfahren immer wieder andere; wir wissen nur, dass sie stattfinden, aber nicht zum Voraus, wo und in welchem Betrage sie erfolgen werden. Die dritte Fehlerursache aber hat, was den besonders erwähnten Instrumentalfehler betrifft, solange einen constanten Fehler des Resultats zur Folge, als gegenseitige Lage der Fläche und des Poles dieselbe ist und kann man sogar zum Voraus aus den Dimensionen des Planimeters und Form und Lage des Contours für jeden Betrag dieses Instrumentalfehlers den Einfluss auf das Resultat berechnen. Mit der gegenseitigen Lage von Pol und Fläche ändert sich derselbe, immer aber in zum Voraus zu berechnendem Betrage. Die dritte Fehlerursache erzeugt also constante, beziehendlich regelmässig (sich ändernde) Fehler und im Gegensatz dazu nennen wir die Fehler in Folge der erstgenannten Ursachen unregelmässige oder auch zufällige, regellose.

Wie im Beispiele, so auch allgemein: Die Fehlerursachen und die von ihnen erzeugten Fehler sind theils vermeidlich, theils unvermeidlich; theils constant oder regelmässig, theils regellos, zufällig, und zwar sind constante und regelmässige Fehler in der Regel vermeidlich, unvermeidlich aber sind immer zufällige Fehler.

Zu den regelmässigen Fehlern zählen u. A. alle durch Instrumentalfehler erzeugten Fehler und sie sind bekanntlich durch directe Ermittelung jener und Berechnung von deren Einfluss oder durch fehlereliminirendes Messverfahren

unschädlich zu machen, d. h. sie sind vermeidlich bis auf relativ zu der Grösse der zufälligen Fehler nicht mehr in Betracht kommende Reste. Demgemäss muss z. B. die Länge eines Messstabes so genau mit der nominellen Länge übereinstimmen, dass eine noch vorhandene kleine Abweichung auf das Resultat vorzunehmender Längenmessungen mindestens keinen grösseren Einfluss haben kann, als die Unsicherheit desselben wegen zufälliger Fehler beträgt.

Zu den Ursachen zufälliger Fehler rechnen wir die Unsicherheit im Einstellen eines Visir-Fadens auf ein Object und im Ablesen an Theilungen, die Unruhe der Bilder entfernter Gegenstände wegen der Undulationen der Luft, kleine Reste der Instrumentalfehler u. A. m. Durch künstliche Verschärfung unserer Sinne können zwar die aus deren Unvollkommenheit entstehenden Fehler in engere Grenzen eingeschlossen werden, doch ganz zu vermeiden sind sie nicht. Auf die Grösse der Fehler aber, deren Ursachen ausserhalb unserer Machtsphäre liegen, wie z. B. die Undulationen der Luft (in der Regel), können wir nicht einwirken und insoweit daher solche Ursachen zur Geltung kommen, ist unseren Bemühungen, die Genauigkeit der Beobachtungen zu erhöhen, eine Schranke gezogen.

IV. Aufgabe der Ausgleichungsrechnung. Setzen wir voraus, dass nur zufällige Fehler eintreten, so müssen wiederholte Messungen einer Grösse Resultate ergeben, die ihren wahren Werth einschliessen — wenigstens müssen wir annehmen, dass es so in der Regel sein wird, nur ausnahmsweise aber alle Resultate kleiner oder grösser als der wahre Werth sind. Im Allgemeinen werden somit Controllemessungen auf die wahren Werthe der Unbekannten hinweisen und durch allmälige Vermehrung der Controllen muss es möglich sein, sich den wahren Werthen der Unbekannten mehr und mehr zu nähern, also die Genauigkeit der aus den Beobachtungen berechneten Werthe der letztern zu erhöhen.

In jedem gegebenen Falle ist es nun die Aufgabe der Ausgleichungsrechnung, aus allen Messungen ein von Messungsfehlern möglichst freies Endresultat, sowie ein Maass für dessen Genauigkeit aus der Grösse der Widersprüche der zusammengehörigen Messungen abzuleiten.

Gewöhnlich verfährt man hierbei nach der Methode der kleinsten (Fehler-)Quadrate, nach welcher die Summe der Quadrate der kleinen Grössen (Fehler, Verbesserungen), welche gleichgenauen Beobachtungswerthen zuzufügen sind, um ihre Widersprüche zu heben, zu einem Minimum gemacht wird.

Die Widersprüche denken wir uns vorerst nur durch zufällige Messungsfehler entstanden und werden finden, dass die Ausgleichung selbst in gewissem Grade das Mittel bietet, zu entscheiden, inwieweit diese Annahme richtig ist.

§. 2.

Die zufälligen Beobachtungsfehler. Fehlergesetz, Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Beobachtungsfehlers. Erfahrungsmässige Form des Fehlergesetzes. Annahme dreier verschiedener Formen.

I. Die zufälligen Beobachtungsfehler. Indem wir einen Theil der Beobachtungsfehler als zufällige Fehler bezeichneten, drückten wir damit aus, dass die Entstehung derselben mehr oder weniger unklar ist, denn bekanntlich nennen wir das Ereigniss gern ein zufälliges, dessen Entstehungsursachen unerklärt bleiben. Hiermit steht nicht in Widerspruch, wenn wir oben Ursachen zufälliger Fehler aufführen konnten, denn die Zurückführung auf diese Ursachen nützt für die mathematische Darstellung gar nichts. Wenn es einmal gelänge, die Ursachen einer Art zufälliger Fehler zurückzuführen auf solche Ursachen, deren Grösse und Wirkung mathematisch darstellbar sein würde, so wären damit die Fehler dieser Art aus der Gattung der zufälligen, regellosen Fehler in die Gattung der regelmässigen Fehler versetzt. Es ist nicht unmöglich, dass jede Art zufälliger Fehler eine Function regelmässiger Fehlerursachen ist, die aber unbekannt sind und in der Regel unbekannt bleiben, weil die Umstände, unter welchen die Messungen erfolgen, sich fortwährend ändern, auch dann geändert haben, wenn wir glauben und im Beobachtungsheft anführen, sie seien dieselben geblieben. Einestheils erkennen wir die kleinen Veränderungen der Umstände nicht wegen der Beschränkung unserer Sinne; anderntheils nehmen wir von vielen Umständen gar keine

Notiz, weil wir sie für unwesentlich halten oder mit Bemerkungen über ihre Veränderungen nichts anzufangen wissen.

Betrachten wir nun eine unbegrenzte Reihe von Messungsergebnissen derselben Art, die mit gleicher Sorgfalt angestellt und nur zufälligen Beobachtungsfehlern unterworfen sind, so wird ein einzelnes derselben für sich betrachtet keinen Vorzug vor den andern verdienen, vielmehr ihm ein bestimmter Fehler mit derselben Wahrscheinlichkeit zugeschrieben werden müssen, als einem der andern Ergebnisse. Wir sagen daher, die Messungsergebnisse haben gleiche Genauigkeit.

Fassen wir aber sämmtliche vorgekommenen zufälligen Fehler ins Auge, so werden dieselben keineswegs alle gleich gross oder Null sein, wie die Widersprüche der Messungsergebnisse lehren, und in Bezug auf das Vorkommen der zufälligen Fehler nach verschiedener Grösse erscheint es nun angemessen, folgende Annahmen zu machen:

(1) Es sind gleich grosse positive und negative Fehler gleich häufig.

(2 Die Häufigkeit des Vorkommens nimmt zu mit der Abnahme des absoluten Betrags des Fehlers.

(3) Für den Fehler Null ist sie ein Maximum.

Beurtheilen wir hiernach einen zu erwartenden Fehler einer Messung derselben Art, so haben wir anzunehmen:

(1) Ein positiver und ein gleichgrosser negativer Fehler sind gleich wahrscheinlich.

(2) Es ist wahrscheinlicher, einen kleinen als einen grossen Fehler zu begehen.

(3) Es ist daher am wahrscheinlichsten eine fehlerfreie Beobachtung zu erhalten.

Bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers ε mit $\varphi(\varepsilon)$, so ist nach obigen Voraussetzungen für zufällige Fehler

(1*) $$\varphi(+\varepsilon) = \varphi(-\varepsilon)$$

d. h. es ist $\varphi(\varepsilon)$ eine gerade Function von ε.

Ferner ist

(2*) $\varphi(\varepsilon)$ abnehmend für wachsende ε^2

(3*) $\varphi(0)$ der grösste Werth
$\varphi(\mp a)$ der kleinste Werth

den $\varphi(\varepsilon)$ erhalten kann, wobei $\mp a$ den grösstmöglichen Werth von ε bezeichnet.

$\varphi(\varepsilon)$, die Fehlerwahrscheinlichkeit, ist hierbei in der Art zu verstehen, wie die mathematische Wahrscheinlichkeit eines zukünftigen Ereignisses, also als Quotient aus der Anzahl der Fälle, wo gerade der Fehler ε vorkommt, und der Anzahl der Fälle, wo überhaupt irgend ein Fehler vorkommt, wobei zu erinnern ist, dass unter diese Fälle auch die genau richtige Beobachtung mit dem Fehler Null gehört. Möglich sind alle Fehler zwischen $\mp a$; ihre Anzahl n ist daher und entsprechend einer unbegrenzten Reihe von Beobachtungen, unendlich gross.

Ist nun s_ε die Anzahl der Fehler in der bestimmten Grösse ε, so ist die Summe aller s_ε für ε von $-a$ bis $+a$ gleich n, also

(4) $$[s_\varepsilon]_{-a}^{+a} = n \text{ d. i. } \infty^*)$$

ferner ist

(5) $$\varphi(\varepsilon) = \frac{s_\varepsilon}{n}$$

d. i. eine unendlich kleine Grösse. Dagegen hat für die verschiedenen Werthe ε und ε' das Verhältniss

$$\varphi(\varepsilon) : \varphi(\varepsilon') = s_\varepsilon : s_\varepsilon'$$

im Allgemeinen einen endlichen Werth. Setzen wir insbesondere

(6) $$\varphi(0) = c$$

so wird

(7) $$\varphi(\varepsilon) = c\,\frac{s_\varepsilon}{s_o}$$

oder, wenn man setzt

(8) $$\frac{s_\varepsilon}{s_o} = \psi(\varepsilon) = \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varphi(0)}$$

(9) $$\varphi(\varepsilon) = c\,\psi(\varepsilon)$$

worin nach (2*) $\psi(\varepsilon)$ ein ächter Bruch sein muss, um so kleiner, je grösser ε wird.

---

*) Auch im Folgenden werden wir als Summenzeichen stets die dazu reservirte eckige Klammer benutzen.

II. Fehlergesetz und Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Beobachtungsfehlers. Die Function $\varphi(\varepsilon)$ nennt man das Fehlergesetz. Es sagt dieses über die Grösse eines einzelnen zu erwartenden Fehlers nichts voraus, sondern giebt nur die Wahrscheinlichkeit für jede beliebige angenommene Grösse desselben an.

Bilden wir die Summe aller $\varphi(\varepsilon)$ zwischen den Grenzen α und β für ε, so ergiebt sich

$$[\varphi(\varepsilon)]_{\alpha}^{\beta} = \left[\frac{s_e}{n}\right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{[s_e]_{\alpha}^{\beta}}{n} \tag{10}$$

d. i. der Quotient aus der Anzahl aller Fehler zwischen α und β, und der Anzahl n aller Fehler; es ist dies also die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen α, β liegt. Nennen wir sie W_{α}^{β}, so hat man daher

$$W_{\alpha}^{\beta} = [\varphi(\varepsilon)]_{\alpha}^{\beta}. \tag{11}$$

Setzen wir noch $\alpha = -a$ und $\beta = +a$ d. h. α und β gleich den äussersten Grenzen für ε, so wird in (10) $[s_e]_{\alpha}^{\beta} = n$, daher ist

$$W_{-a}^{+a} = [\varphi(\varepsilon)]_{-a}^{+a} = 1 \tag{12}$$

d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass überhaupt ein Fehler vorkommt, was gewiss der Fall ist, wird gleich eins.

Mit Rücksicht auf (1*) haben wir noch aus (12)

$$W_{-a}^{+a} = 2\,[\varphi(\varepsilon)]_{o}^{a} = 1 \tag{12*}$$

und aus (11) allgemein für $\alpha < a$.

$$W_{-\alpha}^{+\alpha} = 2\,[\varphi(\varepsilon)]_{o}^{\alpha} < 1. \tag{11*}$$

III. Von welcher Form das Fehlergesetz $\varphi(\varepsilon)$ ist, kann nur durch Beobachtungen ermittelt werden. Allerdings ist deren Anzahl nie unendlich gross zu erlangen, wie streng genommen erforderlich sein würde, doch wird das Fehlergesetz ohne Zweifel auch durch eine endliche Anzahl Beobachtungen näherungsweise zu ermitteln sein und zwar um so schärfer, je grösser diese Anzahl ist.

Den Erfahrungen zufolge entspricht das Fehlergesetz

$$\varphi(\varepsilon) = ce^{-h^2\varepsilon^2} \tag{13}$$

worin bezeichnen

e die Basis der natürlichen Logarithmen,

h eine von der Genauigkeit der Beobachtungen und der Maasseinheit, in welcher ε ausgedrückt ist, abhängige Constante,

c die Wahrscheinlichkeit $\varphi(0)$

dem Vorkommen der zufälligen Beobachtungsfehler mit grosser Annäherung. Zwar erscheint es insofern nicht naturgemäss, als auch beliebig grosse ε nach demselben noch möglich sind, aber sie sind es doch nur mit geringer Wahrscheinlichkeit, indem bei wachsendem ε die Function $\varphi(\varepsilon)$ rasch abnimmt. Ist z. B. für den Fehler ε_1

$$\varphi(\varepsilon_1) = ce^{-h^2\varepsilon_1^2} = c\psi \tag{14}$$

so wissen wir bereits aus (9), dass ψ ein ächter Bruch sein muss. Man hat aber jetzt weiter für

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 2\varepsilon_1 \quad \varphi(2\varepsilon_1) = c\psi^4 = \varphi(\varepsilon_1)\psi^3 \\ \varepsilon &= 3\varepsilon_1 \quad \varphi(3\varepsilon_1) = c\psi^9 = \varphi(\varepsilon_1)\psi^8 \\ &\cdots\cdots \\ \varepsilon &= q\varepsilon_1 \quad \varphi(q\varepsilon_1) = c\psi^{qq} = \varphi(\varepsilon_1)\psi^{qq-1} \end{aligned} \tag{15}$$

woraus die rasche Abnahme von $\varphi(\varepsilon)$ deutlich erhellt, namentlich, wenn wir noch Zahlenwerthe einführen.

Sei $\varepsilon_1 = \mu$ bei $h^2\mu^2 = \frac{1}{2}$, so ist $\varphi(\mu) = \frac{c}{1{,}65}$ also $\psi = \frac{1}{1{,}65}$ und ferner

$$\begin{aligned} \varphi(2\mu) &= 0{,}223\ \varphi(\mu) \\ \varphi(3\mu) &= 0{,}018\ \varphi(\mu) \\ \varphi(4\mu) &< 0{,}001\ \varphi(\mu) \end{aligned} \tag{16}$$

und wäre die Anzahl der Fehler von der Grösse μ etwa 1000, so hätte noch nicht einer der Fehler die Grösse 4μ.

IV. Im Folgenden werden wir über $\varphi(\varepsilon)$ im Allgemeinen die Voraussetzungen (1. 2. 3) (1*. 2*. 3*), theilweise auch nur die Annahme (1. 1*) machen; insbesondere werden wir aber auch zeitweise die Annahmen

$$\left.\begin{aligned} &\text{I.} \quad \varphi(\varepsilon) = c \\ &\text{II.} \quad \varphi(\varepsilon) = c\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{a^2}\right) \end{aligned}\right\} \varepsilon^2 \leq a^2$$

III. $\varphi(\varepsilon) = ce^{-h^2\varepsilon^2}$

betrachten. Der Annahme I zufolge sind alle ε zwischen $\mp a$ gleichwahrscheinlich und es bezeichnet daher diese Annahme einen Grenzfall der Function $\varphi(\varepsilon)$ innerhalb der Bedingungen (1. 2. 3); diesen genügt I insofern gerade noch, als darnach $\varphi(\varepsilon)$ für wachsende ε auch als unmerkbar wenig abnehmend angesehen werden kann.

Die Annahme II ist das erste Glied in der Entwicklung von III nach Potenzen von $h^2\varepsilon^2$, wenn man für h^2 setzt $\frac{1}{a^2}$; sie giebt also eine Näherung für III, doch mit dem Unterschiede, dass $\varphi(\varepsilon)$ darnach schon für endliche Werthe von ε verschwindet.

Genügen die (irgend wie ermittelten) thatsächlichen Beobachtungsfehler den Annahmen (1. 2. 3) nicht, so sind sie nicht rein zufällig, sondern mehr oder weniger vermischt mit regelmässigen Fehlern. Aber zunächst sehen wir im Folgenden von diesem letztern Falle ab, soweit nicht das Gegentheil bemerkt ist.

§. 3.

Maasse für die Genauigkeit einer Beobachtungsreihe: Durchschnittsfehler, mittlerer zu befürchtender Fehler, wahrscheinlicher Fehler. Relationen zwischen denselben für die drei verschiedenen Annahmen über $\varphi(\varepsilon)$; Maass der Präcision bei der dritten Form.

I. Durchschnittsfehler und mittlerer Fehler. Man wird eine Beobachtungsreihe für genauer ansehen, als eine andere, wenn bei ihr vergleichsweise grössere Fehler weniger häufig eingetreten sind, als bei dieser.

Um die noch unbestimmte Ausdrucksweise mehr präcisiren zu können, setzen wir voraus, dass $\varphi(\varepsilon)$ den Bedingungen der Wahrscheinlichkeitsfunction zufälliger Fehler genüge und bezeichnen alle Grössen, die sich auf die genauere Reihe beziehen, oben mit einem Striche und soweit sie sich auf die ungenauere Reihe beziehen, mit Zweistrich.

Auch betrachten wir nur die absoluten Werthe der ε.

Ist nun für einen gewissen Betrag von ε $\varphi'(\varepsilon) < \varphi''(\varepsilon)$, so wird für die nächst grösseren ε diese Ungleichung ebenfalls bestehen, und wir können voraussetzen, dass auch für alle grössern ε diese Ungleichung statthat. Nicht so aber für alle kleinern ε, denn bilden wir die Summe der $\varphi'(\varepsilon)$ sowie die der $\varphi''(\varepsilon)$ für alle möglichen ε, so kommt nach Gl. (12) des vorigen §. beide Male eins heraus, es ist also

$$[\varphi'(\varepsilon)] = [\varphi''(\varepsilon)] \tag{1}$$

und es muss einen Werth α für ε geben, wo $\varphi'(\alpha) = \varphi''(\alpha)$ ist, während für $\varepsilon < \alpha$ $\varphi'(\varepsilon) > \varphi''(\varepsilon)$ wird und zwar können wir voraussetzen, dass alsdann für alle $\varepsilon < \alpha$ diese Ungleichung gilt. Kurz ausgedrückt haben wir: Zufolge der Gl. (1) resultirt aus der Ungleichung

$$\varphi'(\varepsilon > \alpha) < \varphi''(\varepsilon > \alpha) \tag{2}$$

die weitere Ungleichung

$$\varphi'(\varepsilon < \alpha) > \varphi''(\varepsilon < \alpha) \tag{3}$$

worin α stets ein zwischen Null und a gelegener Werth sein wird.

Hiernach hat man, wenn m einen Exponenten $>$ Null bedeutet,

$\varphi'(\varepsilon) - \varphi''(\varepsilon)$ positiv, $\alpha^m - \varepsilon^m$ positiv, für $\varepsilon < \alpha$

$\varphi'(\varepsilon) - \varphi''(\varepsilon)$ negativ, $\alpha^m - \varepsilon^m$ negativ, für $\varepsilon > \alpha$

und es ist somit für beliebige ε

$$\left(\varphi'(\varepsilon) - \varphi''(\varepsilon)\right)\left(\alpha^m - \varepsilon^m\right) \geqq 0.$$

Bildet man für alle Werthe von ε die Summe, so ergiebt sich

$$\left[\left(\varphi'(\varepsilon) - \varphi''(\varepsilon)\right)\left(\alpha^m - \varepsilon^m\right)\right] > 0$$

und aufgelöst

$$\left(\left[\varphi'(\varepsilon)\right] - \left[\varphi''(\varepsilon)\right]\right)\alpha^m - \left[\varepsilon^m \varphi'(\varepsilon)\right] + \left[\varepsilon^m \varphi''(\varepsilon)\right] > 0$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (1)

$$\left[\varepsilon^m \varphi'(\varepsilon)\right] < \left[\varepsilon^m \varphi''(\varepsilon)\right] \qquad m > 0. \tag{4}$$

Diese Ungleichung ist unter der Voraussetzung entwickelt, dass die Wahrscheinlichkeitsfunctionen $\varphi'(\varepsilon)$ und $\varphi''(\varepsilon)$ nur ein Mal, für $\varepsilon = \alpha$, gleich werden, und sie ist daher nicht allgemein für beliebige Formen zufälliger Fehler-

gesetze gültig. Annäherungsweise können wir sie indessen allgemein auch beibehalten, wenn wir bedenken, dass sie für die den thatsächlichen Verhältnissen meist hinreichend genügende Form III des Fehlergesetzes besteht, sowie auch für die einen Grenzfall bezeichnende Form I.

Die Summen (4) haben die Bedeutung durchschnittlicher Werthe der m^{ten} Potenzen der absoluten Werthe aller ε; denn kommt ein bestimmter Fehler s_ε mal vor, ist n die Anzahl (∞) aller Fehler, so ist die Summe (§. 2. (5))

$$S_m = [\varepsilon^m \varphi(\varepsilon)] = \left[\varepsilon^m \frac{s_\varepsilon}{n}\right] = \frac{[\varepsilon^m s_\varepsilon]}{n}$$

d. i. die Summe der m^{ten} Potenzen aller Fehler dividirt durch ihre Anzahl.

Und die Ungleichung (4) zeigt demnach, dass für beliebige positive Werthe des Exponenten die Durchschnittswerthe der m^{ten} Potenzen aller Fehler um so kleiner werden, je genauer die Beobachtungen angestellt worden sind. Dieselben bieten sich daher als Maasse der Genauigkeit (Präcision) der Beobachtungen dar und da jedes $m > 0$ uns den gleichen Dienst leistet, so beachten wir lediglich die praktisch bequemen Formen für m gleich 1 und 2.

$m = 1$ giebt den Durchschnittsfehler ϑ

$$\vartheta = [\text{val. abs. } \varepsilon\varphi(\varepsilon)] \tag{5}$$

$m = 2$ giebt den mittleren (zu befürchtenden) Beobachtungs-Fehler (nach Gauss) im Quadrat

$$\mu^2 = [\varepsilon^2 \varphi(\varepsilon)].^*) \tag{6}$$

Man setzt den numerischen Werthen von ϑ und μ das Vorzeichen $\mp$ vor aus leicht begreiflichen Gründen.

Um bei späterem Gebrauche der Formel (5) Irrungen zu vermeiden, ist in derselben besonders hervorgehoben, dass die Fehler ihrem absoluten Werthe nach in Betracht zu ziehen sind. Dagegen würde die Summe $[\varepsilon\varphi(\varepsilon)]$ mit

*) Wir werden μ in der Regel kurz als mittlern Fehler bezeichnen, bemerken aber, dass manche Schriftsteller unter mittlerem Fehler nicht μ sondern ϑ verstehen.

Rücksicht auf's Vorzeichen der ε wegen der Bedingung (1*) §. 2. gleich Null werden.

II. Wahrscheinlicher Fehler. Ausser dem Durchschnittsfehler und dem mittleren Fehler findet man häufig den wahrscheinlichen Fehler angegeben: Die Ungleichung (4) versagt für $m = 0$, wo sie in die Gleichung (1) übergeht. Bilden wir nun anstatt der Summe aller $\varphi(\varepsilon)$ nur die Summe derselben für ε zwischen den Grenzen $-\varrho$ und $+\varrho$, wo ϱ^2 jedenfalls $< a^2$, dem Quadrate des grösstmöglichen Fehlers, so wird sich finden, dass für

$$[\varphi'(\varepsilon)]_{-\varrho'}^{+\varrho'} = [\varphi''(\varepsilon)]_{-\varrho''}^{+\varrho''}$$
$$\varrho' < \varrho''$$

sein muss. Um dies zu beweisen, unterscheiden wir die Fälle $\varrho' \lessgtr \alpha$. Summiren wir nun in Ungleichung (3) beiderseits für alle Werthe ε zwischen $\mp\varrho'$, so erhalten wir rechts im Falle, dass $\varrho' \leqq \alpha$ ist, immer weniger als links und müssen daher die Summationsgrenzen für ε rechts weiter ausdehnen, das heisst $\varrho'' > \varrho'$ nehmen.

Ist $\varrho' > \alpha$, so wird nach (2)

$$[\varphi'(\varepsilon)]_{\varrho'}^{a'} < [\varphi''(\varepsilon)]_{\varrho'}^{a''}$$

indem rechts die Summanden grösser und wegen $a' \leqq a''$ (was aus (2) folgt) auch zahlreicher sind.

Da nun nach (1)

$$[\varphi'(\varepsilon)]_{o}^{a'} = [\varphi''(\varepsilon)]_{o}^{a''}$$

so hat man durch Subtraction

$$[\varphi'(\varepsilon)]_{o}^{\varrho'} > [\varphi''(\varepsilon)]_{o}^{\varrho'}$$

mithin auch

$$[\varphi'(\varepsilon)]_{-\varrho'}^{+\varrho'} > [\varphi''(\varepsilon)]_{-\varrho'}^{+\varrho'}$$

und um rechts denselben Werth wie links zu erhalten, müssen wir die Grenzen auf $\mp\varrho''$ erweitern, so dass abermals

$$\varrho' < \varrho''$$

wird. In der Regel nimmt man ϱ so an, dass

$$[\varphi(\varepsilon)]_{-\varrho}^{+\varrho} = \tfrac{1}{2} \tag{7}$$

und ϱ heisst alsdann wahrscheinlicher Fehler, weil

es so bestimmt ist, dass die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens eines ε innerhalb $\mp \varrho$ gerade $\frac{1}{2}$ d. i. gerade so gross ist, als die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens ausserhalb dieser Grenzen.

Die Vergleichung der wahrscheinlichen Fehler lässt ebenfalls wie die der Durchschnittsfehler und der mittleren Fehler erkennen, welche von zwei Beobachtungsreihen die genauere ist. Bezeichnen wir die Genauigkeiten mit G' und G'', so ist

$$G' > G'' \tag{8}$$

wenn

$$\begin{aligned} \vartheta' &< \vartheta'' \\ \mu' &< \mu'' \\ \varrho' &< \varrho'' \end{aligned} \tag{9}$$

und zwar bedarf es nur der Prüfung einer dieser Ungleichungen. In aller Strenge gelten diese drei Ungleichungen gleichzeitig nur dann, wenn für die beiden Fehlergesetze dieselben beschränkenden Annahmen bestehen, wie für die Entwickelung von (4); jedoch kann man sie ebenso wie diese Ungleichung als Näherung für alle wirklich vorkommenden Fälle betrachten.

III. Relationen zwischen Durchschnittsfehler, mittleren und wahrscheinlichen Fehler. Zwischen ϑ, μ und ϱ einer Beobachtungsreihe finden Relationen statt, die nur von der Zusammensetzung der Function $\varphi(\varepsilon)$ abhängen und sich numerisch angeben lassen, wenn diese bekannt ist. Um die Relationen für die Annahmen I. II. III über $\varphi(\varepsilon)$ aufzusuchen, geben wir den Ausdrücken für ϑ, μ und ϱ eine andere Gestalt mit Rücksicht darauf, dass der von uns vorausgesetzten unendlich grossen Anzahl n der Fehler ε ein stetiger Verlauf von ε und im Allgemeinen auch von $\varphi(\varepsilon)$ zwischen den äussersten Werthen von ε, $-a$ und $+a$, entspricht.

Nach Gl. (12) des vorigen §. ist identisch, von ε nur den absoluten Werth berücksichtigt,

$$\left[\varepsilon^m \varphi(\varepsilon)\right]_a^\beta = \frac{\left[\varepsilon^m \varphi(\varepsilon)\right]_\alpha^\beta}{\left[\varphi(\varepsilon)\right]} \tag{10}$$

Wir multipliciren rechts Zähler und Nenner mit dem Differential $d\varepsilon$ und erhalten damit

$$(10^*) \qquad \left[\varepsilon^m \varphi(\varepsilon)\right]_\alpha^\beta = \frac{\int_\alpha^\beta \varepsilon^m \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon}{\dot{\int}_{-a}^{+a} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon}$$

oder den von ε unabhängigen Nenner

$$(11) \qquad \dot{\int}_{-a}^{+a} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon \text{ d. i. } 2\dot{\int}_0^a \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{1}{\varkappa}$$

gesetzt, ferner

$$(12) \qquad \left[\varepsilon^m \varphi(\varepsilon)\right]_\alpha^\beta = \varkappa \dot{\int}_\alpha^\beta \varepsilon^m \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon.$$

Ganz strenge ist die Ableitung dieser Formel insofern nicht, als für (10) und (10*) die Producte

$$\left[\varepsilon^m \varphi(\varepsilon)\right]_\alpha^\beta \, d\varepsilon \text{ und } \left[\varphi(\varepsilon)\right] d\varepsilon$$

nicht identisch mit den Integralen

$$\dot{\int}_\alpha^\beta \varepsilon^m \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon \qquad \dot{\int}_{-a}^{+a} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

sind; denn während in obigen Producten ε als stetig geändert vorausgesetzt wurde, ist in den Integralen die Aenderung keine stetige, sondern eine sprungsweise in constanten Intervallen $d\varepsilon$. Denkt man sich die Curve $\varepsilon^m \varphi(\varepsilon)$ in rechtwinkligen Coordinaten construirt: ε als Abscisse, $\varphi(\varepsilon)$ als Ordinate — so ist $\left[\varepsilon^m \varphi(\varepsilon)\right]_\alpha^\beta$ die Summe der Ordinaten über der Abscisse $(\beta - \alpha)$, dagegen ist $\int_\alpha^\beta \varepsilon^m \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ die Fläche über der Abscisse $(\beta - \alpha)$. So lange nun die Ordinaten stetig einander folgen, kann an eine Vergleichung von $\left[\varepsilon^m \varphi(\varepsilon)\right]_\alpha^\beta d\varepsilon$ mit $\int_\alpha^\beta \varepsilon^m \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ nicht gedacht werden: man bemerkt gar keinen Zusammenhang zwischen dem Product aus der Ordinatensumme in $d\varepsilon$ und der Fläche und zwar ebensowenig, wie zwischen der Summe aller Zahlen zwischen α und β und der Differenz $\beta - \alpha$. Nimmt man aber an, dass $\varepsilon^m \varphi(\varepsilon)$ sich nur auf eine Reihe discreter Werthe ε im Intervalle $d\varepsilon$ beziehe, so ist sofort klar, dass $\left[\varepsilon^m \varphi(\varepsilon)\right]_\alpha^\beta d\varepsilon$ und $\int_\alpha^\beta \varepsilon^m \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ identische Werthe sind.

Hieraus erhellt, dass die Entwickelung von (10*) und (12) stillschweigend angenommen hat, $\varphi(\varepsilon)$ werde nicht für die sich stetig ändernde Veränderliche ε, sondern nur für eine Reihe discreter Werthe

derselben im gegen die Null convergirenden Intervalle $d\varepsilon$ betrachtet. Dies entspricht aber vollkommen den thatsächlichen Verhältnissen: Wenn wir eine Reihe von Fehlern ε betrachten, so kürzen wir alle Werthe immer bis auf eine gewisse Decimale ab, deren Einheit nun $d\varepsilon$ vorstellt, und als Wahrscheinlichkeit eines solchen Fehlers ε nehmen wir den Quotienten aus der Anzahl der Fehler in diesem Betrage und der Anzahl aller Fehler. Dieser Quotient $\Phi(\varepsilon)$ ist von $\varphi(\varepsilon)$ verschieden, denn $\varphi(\varepsilon)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass der genaue Werth ε eintritt, dagegen ist $\Phi(\varepsilon)$ die Wahrscheinlichkeit, dass ε zwischen den Grenzen $\varepsilon - \frac{d\varepsilon}{2}$ und $\varepsilon + \frac{d\varepsilon}{2}$ liege, weil alle Fehler zwischen diesen Grenzbeträgen als Fälle, wo der Fehler ε selbst eingetreten ist, gerechnet wurden.

Wir wenden die Formeln (11) und (12) an auf die Umformung von ϑ, μ^2 und ϱ:

Aus (12. 5. 6) folgt nach leichter Reduction, $\alpha = -a$ $\beta = +a$ gesetzt,

$$\vartheta = \varkappa \int_{-a}^{+a} \varepsilon \varphi(\varepsilon) d\varepsilon \text{ d. i. } 2\varkappa \int_{0}^{a} \varepsilon \varphi(\varepsilon) d\varepsilon \tag{13}$$

$$\mu^2 = \varkappa \int_{-a}^{+a} \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon) d\varepsilon \text{ d. i. } 2\varkappa \int_{0}^{a} \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon) d\varepsilon. \tag{14}$$

Anstatt der obern Grenze a setzen wir ohne Fehler ∞, da $\varphi(\varepsilon)$ für $\varepsilon > a$ verschwindet und haben aus (11. 13. 14)

$$2\varkappa \int_{0}^{\infty} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = 1 \tag{15}$$

$$\vartheta = 2\varkappa \int_{0}^{\infty} \varepsilon \varphi(\varepsilon) d\varepsilon \tag{16}$$

$$\mu^2 = 2\varkappa \int_{0}^{\infty} \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon) d\varepsilon \tag{17}$$

und aus (7) und (12)

$$2\varkappa \int_{0}^{\varrho} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = \tfrac{1}{2}. \tag{18}$$

Die Annahme I: $\varphi(\varepsilon) = c \quad \varepsilon^2 < a^2$ giebt hiermit

$$2\varkappa c = \frac{1}{a} \tag{15*}$$

(16*) $$\vartheta = \frac{a}{2}$$

(17*) $$\mu^2 = \frac{a^2}{3} \quad \mu = 0.57735\, a$$

(18*) $$\varrho = \frac{a}{2}$$

und damit für Annahme

$$\text{I.} \begin{cases} \varrho = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mu = 0.86603\,\mu \\ \mu = \sqrt{\frac{4}{3}}\,\vartheta = 1.15470\,\vartheta \end{cases}$$

Die Annahme II: $\varphi(\varepsilon) = c\,(1 - \frac{\varepsilon^2}{a^2}) \quad \varepsilon^2 \leqq a^2$ giebt

(15**) $$2\varkappa c = \frac{3}{2a}$$

(16**) $$\vartheta = \frac{3}{8}\,a$$

(17**) $$\mu^2 = \frac{a^2}{5} \quad \mu = 0.44721\, a.$$

Ferner aus (18)

$$\tfrac{1}{2} = \frac{3}{2a}\int_0^{\varrho}(1 - \frac{\varepsilon^2}{a^2})\,d\varepsilon = \frac{3a^2\varrho - \varrho^3}{2a^3}.$$

Daher ist zur Bestimmung von ϱ

$$\varrho^3 - 3a^2\varrho + a^3 = 0$$

und die bekannte trigonometrische Auflösung giebt hieraus den einzigen brauchbaren Werth

(18**) $$\varrho = 0.34729.6\, a$$

indem die absoluten Werthe der beiden andern Wurzeln $> a$ sind. Es wird nun damit für Annahme

$$\text{II.} \begin{cases} \varrho = 0.77658\,\mu \\ \mu = 1.19257\,\vartheta. \end{cases}$$

Die Annahme III: $\varphi(\varepsilon) = ce^{-h^2\varepsilon^2}$ giebt

$$2\varkappa c\int_0^{\infty} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = 1$$

$$2\varkappa c\int_0^{\infty} e^{-h^2\varepsilon^2}\varepsilon\, d\varepsilon = \vartheta$$

$$2\varkappa c\int_0^{\infty} e^{-h^2\varepsilon^2}\varepsilon^2\, d\varepsilon = \mu^2.$$

Bekanntlich ist aber

$$\int_0^\infty e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{\sqrt{\pi}}{2h}; \int_0^\infty e^{-h^2\varepsilon^2} \varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2h^2}; \int_0^\infty e^{-h^2\varepsilon^2} \varepsilon^2 d\varepsilon = \frac{1}{2h^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2h}.$$

Daher hat man

(15†) $$2\varkappa c = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}$$

(16†) $$\vartheta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}$$

(17†) $$\mu^2 = \frac{1}{2h^2}.$$

Es ist ferner nach (18) und (15†)

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\varrho e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{2}$$

und setzen wir hierin $h\varepsilon = t$, so wird daraus

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\varrho} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}.$$

Um ϱ zu finden, gehen wir in eine der bekannten Tafeln der Integralwerthe von

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$$

und haben u. A.

t	Integralwerth
0.00	0.00000
0.10	0.11246
0.20	0.22270
0.30	0.32863
0.40	0.42839
0.46	0.48466
0.47	0.49375
0.48	0.50275
0.50	0.52050
0.60	0.60386
0.70	0.67780
0.80	0.74210
0.90	0.79691
1.00	0.84270
1.50	0.96611
2.00	0.99532

Durch Interpolation folgt hieraus t für den Integralwerth 0,50000 zu 0,47694; es ist daher

(18†) $$h\varrho = 0.47694$$

und hiernach sowie nach (16†) und (17†) für Annahme

$$\text{III.} \begin{cases} \varrho = 0.67449\ \mu \\ \mu = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \vartheta = 1.25331\ \vartheta. \end{cases}$$

Zusammengestellt haben wir für die drei Annahmen das Tableau

(19)

	$\varrho =$	$\mu =$
I	$0.86603\ \mu$	$1.15470\ \vartheta$
II	$0.77658\ \mu$	$1.19257\ \vartheta$
III	$0.67449\ \mu$	$1.25331\ \vartheta$

ϱ, μ, ϑ stehen sonach für jede der drei Annahmen für sich in constantem Verhältnisse.

IV. Man setzt nun die mathematische Genauigkeit der Beobachtungen umgekehrt proportional den mittlern Fehlern:

(20) $$G' : G'' = \mu'' : \mu'$$

und hat daher auch bei Vergleichung zweier Reihen mit derselben Function $\varphi(\varepsilon)$, I, II oder III,

(20*) $$G' : G'' = \mu'' : \mu' = \vartheta'' : \vartheta' = \varrho'' : \varrho'.$$

Für Annahme III ist insbesondere wegen (17†)

$$\mu' : \mu'' = h'' : h'$$

daher auch

(21) $$G' : G'' = h' : h''$$

wesshalb man h das Maass der Präcision nennt.

Insofern die Annahme III dem Vorkommen zufälliger Beobachtungsfehler erfahrungsmässig im Allgemeinen näherungsweise genügt, kann man wegen (20*) sowohl aus μ wie ϑ wie ϱ auf die Genauigkeit schliessen; ja es lässt sich zeigen, dass für die beiden Beobachtungsreihen auch die m^{ten} Wurzeln aus den Durchschnittswerthen beliebiger m^{ter} Potenzen (Gl. (4)) in demselben Verhältnisse, wie die drei

betrachteten Fehlergrössen stehen. Man berechnet daher diejenige Grösse, welche aus praktischen Gründen die meisten Vortheile bietet:

Nächst der Bequemlichkeit der Rechnung ist hierbei die Genauigkeit derselben zu beachten. Letztere insofern, als nie eine unendliche Anzahl, sondern stets eine endliche Anzahl Fehler ε vorliegen werden, aus denen das Maass der Genauigkeit der Beobachtungen zu ermitteln ist. Die endliche Fehleranzahl aber bringt $\varphi(\varepsilon)$ um so weniger zum Ausdruck, je geringer sie ist und es werden daher die Bestimmungen von μ ϑ ϱ fehlerhaft werden, die genaueste derselben aber zu nehmen sein.

Wir gehen dazu über, aus einer endlichen Anzahl wahrer Fehler ε die Genauigkeitsmaasse ϑ μ ϱ zu berechnen unter Angabe der diesen Berechnungen anhaftenden Fehler.

§. 4.

Bestimmung des durchschnittlichen und des mittlern zu befürchtenden Fehlers aus einer endlichen Anzahl Fehler ε. Mittlerer zu befürchtender Fehler dieser Bestimmungen. Die directe Ermittlung des mittlern Fehlers μ aus der Quadratsumme der ε ist die genaueste Bestimmung. Directe Ermittlung des wahrscheinlichen Fehlers.

I. Bestimmung des durchschnittlichen und des mittlern zu befürchtenden Fehlers aus einer endlichen Anzahl Fehler. Sei die Anzahl der Fehler n und $\varphi(\varepsilon)$ das den Fehlern der betreffenden Art von Beobachtungen zukommende Fehlergesetz, so denken wir uns zwischen den grösstmöglichsten Werthen von ε, d. i. $-a$ und $+a$, $n-1$ Fehler $\varepsilon' \varepsilon'' \ldots \varepsilon^{(n-1)}$ eingeschaltet, so zwar, dass die Wahrcheinlichkeiten des Vorkommens eines Fehlers ε zwischen den Grenzen $-a$ und ε', ε' und ε'', $\ldots \varepsilon^{(n-2)}$ und $\varepsilon^{(n-1)}$, $\varepsilon^{(n-1)}$ und $+a$ gleich gross und mithin gleich $\frac{1}{n}$ sind.

Je grösser die Anzahl n ist, um so mehr werden die n Fehler ε so vorkommen, dass je einer derselben innerhalb eines der n Intervalle zu liegen kommt, denn eine unendliche Fehleranzahl repräsentirt ja in aller Strenge das Fehlergesetz $\varphi(\varepsilon)$ selbst.

Bezeichnen wir nunmehr den Durchschnittswerth der m^{ten} Potenzen der Fehler (§. 3. (4)) mit S_m:

$$S_m = [\varepsilon^m \varphi(\varepsilon)] \tag{1}$$

worin wie früher alle ε positiv einzuführen sind, so haben wir auch durch Zerlegung in partiale Summen für jedes der obigen n Intervalle

$$S_m = [\varepsilon^m \varphi(\varepsilon)]_{-a}^{\varepsilon'} + [\varepsilon^m \varphi(\varepsilon)]_{\varepsilon'}^{\varepsilon''} + \ldots$$
$$+ [\varepsilon^m \varphi(\varepsilon)]_{\varepsilon^{(n-2)}}^{\varepsilon^{(n-1)}} + [\varepsilon^m \varphi(\varepsilon)]_{\varepsilon^{(n-1)}}^{+a}.$$

Näherungsweise können wir aber innerhalb jedes Gliedes ε als constant betrachten und zwar resp. gleich

$$\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \ldots \quad \varepsilon_{n-1} \quad \varepsilon_n$$

und haben alsdann näherungsweise

$$S_m \doteq \varepsilon_1^m [\varphi(\varepsilon)]_{-a}^{\varepsilon'} + \varepsilon_2^m [\varphi(\varepsilon)]_{\varepsilon'}^{\varepsilon''} + \ldots$$
$$+ \varepsilon_{n-1}^m [\varphi(\varepsilon)]_{\varepsilon^{(n-2)}}^{\varepsilon^{(n-1)}} + \varepsilon_n^m [\varphi(\varepsilon)]_{\varepsilon^{(n-1)}}^{+a}.$$

Da aber zufolge der Bestimmungsweise von $\varepsilon' \varepsilon'' \ldots$ die hierin vorkommenden Wahrscheinlichkeitssummen gleich sind, nämlich jede gleich $\frac{1}{n}$, so wird

$$S_m = \frac{\varepsilon_1^m + \varepsilon_2^m + \ldots + \varepsilon_{n-1}^m + \varepsilon_n^m}{n}. \tag{2}$$

Insbesondere sind

$$\vartheta = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n}{n} = \frac{[\text{val. abs. } \varepsilon]}{n}$$
$$\mu^2 = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2}{n} = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n} \tag{3}$$

und ϑ und μ^2 können hiernach aus einer endlichen Anzahl wahrer Fehler berechnet werden.

II. Bestimmung der mittlern zu befürchtenden Fehler in ϑ und μ^2. Die Formeln (3) bestimmen ϑ und μ^2 nur näherungsweise richtig; denn die n Fehler werden mehr oder weniger von der vorausgesetzten Vertheilung abweichen. Sei nun S_m der strenge Werth des Durchschnittsbetrages der m^{ten} Potenzen der Fehler, so ist

$$(4) \qquad \left(\frac{\varepsilon_1^m + \varepsilon_2^m + \ldots + \varepsilon_{n-1}^m + \varepsilon_n^m}{n} - S_m\right)^2$$

das Quadrat des Fehlers des berechneten S_m. Jedes der ε kann alle Werthe zwischen Null und a annehmen und das Fehlerquadrat von S_m schwankt daher zwischen

$$(4^*) \qquad (a^m - S_m)^2 \text{ und } S_m{}^2,$$

welche Grenzfälle eintreten für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = a$ resp. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = 0$.

Lassen wir jedes der ε alle möglichen Werthe mit Rücksicht auf deren Wahrscheinlichkeit annehmen, bilden alle zugehörenden Fehlerquadrate des berechneten S_m und den Durchschnittswerth derselben, so erhalten wir in diesem, als dem Durchschnittswerthe der Fehlerquadrate, offenbar das Quadrat des mittlern zu befürchtenden Fehlers in dem berechneten Werthe von S_m.

Wir haben aber

$$\left(\frac{\varepsilon_1^m + \varepsilon_2^m + \ldots + \varepsilon_{n-1}^m + \varepsilon_n^m}{n} - S_m\right)^2 = \frac{\varepsilon_1^{2m} + \varepsilon_2^{2m} + \ldots + \varepsilon_n^{2m}}{n^2}$$

$$(5) \qquad + 2\frac{\varepsilon_1^m \varepsilon_2^m + \varepsilon_1^m \varepsilon_3^m + \varepsilon_2^m \varepsilon_3^m + \ldots + \varepsilon_{n-1}^m \varepsilon_n^m}{n^2}$$

$$- 2 S_m \frac{\varepsilon_1^m + \varepsilon_2^m + \ldots + \varepsilon_n^m}{n} + S_m{}^2.$$

Der Durchschnittsbetrag der rechten Seite dieser Identität für alle möglichen Werthe jedes der ε wird aber erhalten, indem man von jedem Gliede einzeln den Durchschnittswerth ermittelt. Für den Durchschnittswerth eines der Glieder

$$\varepsilon_1^{2m}, \varepsilon_2^{2m}, \ldots \varepsilon_n^{2m}$$

haben wir nach §. 3. (4. 12.), als dem Durchschnittswerth der $2m^{\text{ten}}$ Potenzen aller möglichen Fehler, den Werth

$$(6) \qquad 2\varkappa \int_0^\infty \varepsilon^{2m} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = J_{2m}$$

worin J_{2m} zur Abkürzung eingeführt ist.

Hiernach ist der Durchschnittswerth von

$$\frac{\varepsilon_1^{2m} + \varepsilon_2^{2m} + \ldots + \varepsilon_n^{2m}}{n^2} \text{ gleich } \frac{J_{2m}}{n}.$$

Den Durchschnittswerth von $\varepsilon_1^m \varepsilon_2^m$ erhalten wir, indem erst ε_1 bei constantem ε_2 alle möglichen Werthe beigelegt werden. Das giebt $J_m \varepsilon_2^m$, unter J_m den Durchschnittswerth der m^{ten} Potenzen aller möglichen Fehler verstanden:

$$J_m = 2\varkappa \int_0^\infty \varepsilon^m \varphi(\varepsilon) d\varepsilon \tag{7}$$

Giebt man nun noch ε_2 alle möglichen Werthe, so folgt im Durchschnitt für $\varepsilon_1^m \varepsilon_2^m$ der Werth J_m^2; daher ist der Durchschnittswerth des aus $\frac{n(n-1)}{2}$ Gliedern bestehenden Ausdrucks

$$2\,\frac{\varepsilon_1^m \varepsilon_2^m + \varepsilon_1^m \varepsilon_3^m + \varepsilon_2^m \varepsilon_3^m + \ldots + \varepsilon_{n-1}^m \varepsilon_n^m}{n^2}$$

gleich $\frac{2}{n^2}\,\frac{n(n-1)}{2} J_m^2$ d. i.

$$J_m^2 (1 - \tfrac{1}{n}).$$

Der Durchschnittswerth von

$$2\,S_m\,\frac{\varepsilon_1^m + \varepsilon_2^m + \ldots + \varepsilon_n^m}{n}$$

endlich ist wie leicht zu sehen gleich $2 S_m J_m$. Da nun der strenge Werth von S_m dasselbe bedeutet als J_m, so haben wir dafür auch $2 J_m^2$ und ferner für S_m^2, dem letzten Gliede in (5), auch J_m^2.

Es wird nun das Quadrat des mittlern zu befürchtenden Fehlers μ_m in dem aus n Fehlern ε nach (2) berechneten S_m gleich:

$$\frac{1}{n} J_{2m} + J_m^2 (1 - \tfrac{1}{n}) - 2 J_m^2 + J_m^2$$

d. i. gleich

$$\mu_m^2 = \frac{1}{n} (J_{2m} - J_m^2) = \frac{J_m^2}{n} \left(\frac{J_{2m}}{J_m^2} - 1 \right). \tag{8}$$

Insbesondere ist das Quadrat des mittlern Fehlers in ϑ, dies berechnet nach Formel (3), gleich:

$$\mu_1^2 = \frac{\vartheta^2}{n} \left(\frac{\mu^2}{\vartheta^2} - 1 \right) \tag{9}$$

weil J_2 und J_1 resp. gleich μ^2 und ϑ sind. Ferner wird

das Quadrat des mittlern Fehlers in μ^2, dieses berechnet nach Formel (3), gleich:

$$\mu_2^2 = \frac{\mu^4}{n}\left(\frac{J_4}{\mu^4} - 1\right) \tag{10}$$

wofür

$$J_4 = 2\varkappa c \int_0^\infty \varepsilon^4 \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon.$$

Wir wenden diese Formeln auf die drei Annahmen über $\varphi(\varepsilon)$ an und haben (§. 3. III):

Für Annahme I: $\varphi(\varepsilon) = c \quad \varepsilon^2 \leqq a^2$

$$J_4 = 2\varkappa c \frac{a^5}{5} = \frac{a^4}{5}$$

$$\frac{J_4}{\mu^4} = \frac{9}{5} \qquad \frac{\mu^2}{\vartheta^2} = \frac{4}{3}$$

$$\mu_1^2 = \frac{a^2}{12n} = \frac{\vartheta^2}{3n} \tag{9*}$$

$$\mu_2^2 = \frac{4a^4}{45n} = \frac{4}{5}\,\frac{\mu^4}{n}. \tag{10*}$$

Für Annahme II: $\varphi(\varepsilon) = c\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{a^2}\right) \quad \varepsilon^2 \leqq a^2$

$$J_4 = 2\varkappa c\left(\frac{a^5}{5} - \frac{a^5}{7}\right) = \frac{3}{35}a^4$$

$$\frac{J_4}{\mu^4} = \frac{15}{7} \qquad \frac{\mu^2}{\vartheta^2} = \frac{64}{45}$$

$$\mu_1^2 = \frac{19a^2}{320n} = \frac{19}{45}\,\frac{\vartheta^2}{n} \tag{9**}$$

$$\mu_2^2 = \frac{8a^4}{175n} = \frac{8}{7}\,\frac{\mu^4}{n}. \tag{10**}$$

Für Annahme III: $\varphi(\varepsilon) = ce^{-h^2\varepsilon^2}$

$$J_4 = 2\varkappa c \int_0^\infty \varepsilon^4 e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{3}{4h^4}$$

$$\frac{J_4}{\mu^4} = 3 \qquad \frac{\mu^2}{\vartheta^2} = \frac{\pi}{2} = 1.57080$$

$$\mu_1^2 = \frac{\pi - 2}{2\pi n h^2} = \frac{\pi - 2}{2}\,\frac{\vartheta^2}{n} \tag{9†}$$

$$\mu_2^2 = \frac{1}{2nh^4} = 2\frac{\mu^4}{n}. \tag{10†}$$

Hiermit ergiebt sich folgende Uebersicht der mittlern Fehlerquadrate in der Bestimmung von ϑ resp. μ^2 nach (3) aus n wahren Fehlern:

(11)

	I	II	III	
μ_1^2	0.33333	0.42222	0.57080	$\asymp \frac{\vartheta^2}{n}$
μ_2^2	0.80000	1.14286	2.00000	$\asymp \frac{\mu^4}{n}$

Ziehen wir die Quadratwurzeln aus diesen Werthen, so ergeben sich die mittlern Fehler für ϑ und μ^2.

Um ferner den mittlern Fehler für μ selbst abzuleiten, bedenken wir, dass einem Fehler Δ in μ ein Fehler $\Delta(2\mu + \Delta)$ in μ^2 entspricht, wofür näherungsweise $2\mu\Delta$ gesetzt werden darf. Es ist daher der Fehler in μ von dem Fehler in μ^2 der $2\mu^{te}$ Theil und offenbar gilt dies auch für den mittlern Fehler. Wir haben somit:

Mittlerer zu befürchtender Fehler in μ gleich:

(12) $$\frac{\mu_2}{2\mu}.$$

Hiermit erhalten wir folgendes Tableau:

(13)

Mittlerer Fehler	I	II	III	
in ϑ	0.57735	0.64979	0.75551	$\asymp \frac{\vartheta}{\sqrt{n}}$
in μ	0.44721	0.53452	0.70711	$\asymp \frac{\mu}{\sqrt{n}}$

Hiernach ist die Genauigkeit der Berechnung von ϑ und μ proportional der Quadratwurzel aus der Anzahl der zur Rechnung verwendeten wahren Fehler. Ferner ist

III. Die directe Berechnung des mittlern Fehlers μ für die drei Annahmen über $\varphi(\varepsilon)$ genauer als die indirecte mit Hülfe des direct ermittelten Durchschnittsfehlers ϑ. Denn beispielsweise ist für Annahme III bei directer Berechnung der mittlere Fehler enthalten zwischen den (mittlern) Grenzen

(14) $$\mu\left(1 \mp \frac{0.70711}{\sqrt{n}}\right)$$

dagegen bei Berechnung aus ϑ zwischen den Grenzen

$$1.25331 \asymp \left(\vartheta \mp 0.75551 \frac{\vartheta}{\sqrt{n}}\right)$$

d. i. aber

$$\mu\left(1 \mp \frac{0.75551}{\sqrt{n}}\right). \tag{14*}$$

Ist n so gross, dass die Berechnung von ϑ und μ überhaupt sehr genau wird, so ist es alsdann auch ziemlich gleichgültig, wie man μ berechnet, da der Unterschied der Genauigkeiten, an sich nicht beträchtlich, in diesem Falle noch weniger ins Gewicht fällt.

Wollte man μ indirect aus dem Durchschnittswerthe der 3ten oder höherer Potenzen aller gegebenen Fehler berechnen, so würde die Rechnung jedenfalls unbequemer und auch ungenauer. (Gauss, Zeitschr. f. Astr. und verwandte Wissensch. von v. Lindenau u. Bohnenberger p. 185 B. I oder Encke, Berliner astron. Jahrbuch 1834 p. 288.)*)

IV. Der wahrscheinliche Fehler ϱ lässt sich durch Abzählen direct ermitteln. Ordnet man nämlich die n Fehler ε nach ihrer Grösse ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, so wird nach der Definition von ϱ die eine Hälfte der Fehler zwischen Null und ϱ, die andere zwischen ϱ und dem Grenzwerthe a zu suchen sein, und man hat daher ϱ demgemäss anzunehmen. Die Vermuthung, dass diese Bestimmungsweise von ϱ sehr unsicher ist, bestätigt sich bei genauerer Untersuchung. (Gauss, Zeitschr. etc. p. 195. Encke, Berl. Jahrb. etc. p. 295.) Wir werden im Folgenden auf die directe Bestimmung von ϱ verzichten, schon darum, weil wir in der Regel nur solche Fehler kennen lernen, die die Ausgleichung fordert, welche aber von den wahren Fehlern abweichen. Die Bestimmung von ϱ durch Abzählen an jenen Fehlern würde offenbar deshalb einer noch grössern Unsicherheit unterliegen.

) Wir können hier nicht unerwähnt lassen, dass eine strengere Untersuchung erst feststellen müsste, ob man die Genauigkeit der Berechnung von ϑ und μ nach den mittlern Fehlern (13) beurtheilen darf. Denn die Fehler in S_m befolgen, wie (4) zeigt, offenbar ein Gesetz, welches von der in §. 3. I. angenommenen Form des Fehlergesetzes abweicht, so dass (8) und (9) jenes §. nicht unmittelbar auf den jetzt vorliegenden Fall übertragen werden dürfen. Eine genauere Untersuchung, die nicht einfach ausfällt, würde uns zu weit führen.

Beispiel. (Beispiel 12 §. 30. und 31.) Sind gegeben die wahren Fehler für fünf Beobachtungen derselben Art:

(1) $\quad -1.37 + 1.77 + 1.04 - 0.81 - 0.75$

so wird

(2) $$\vartheta = \mp \frac{5.74}{5} = \mp 1.15$$

(3) $$\mu = \mp \sqrt{\frac{1}{5}\left(1.37^2 + 1.77^2 + 1.04^2 + 0.81^2 + 0.75^2\right)}$$
$$= \mp \sqrt{\frac{7.31}{5}} = \mp 1.21.$$

Für Annahme III ist der mittlere Fehler in ϑ gleich:

(2*) $$\mp 0.756 \frac{1.15}{\sqrt{5}} \text{ d. i. } \mp 0.39$$

oder es liegt ϑ zwischen den (mittlern) Grenzen:

$$\mp (1.15 \mp 0.39) \text{ d. i. } \mp 0.76 \text{ und } \mp 1.54.$$

Ferner ist der mittlere Fehler in μ gleich

(3*) $$\mp 0.707 \frac{1.21}{\sqrt{5}} \text{ d. i. } \mp 0.38$$

oder es liegt μ zwischen den (mittlern) Grenzen:

$$\mp (1.21 \mp 0.38) \text{ d. i. } \mp 0.83 \text{ und } \mp 1.59.$$

Berechnet man μ aus ϑ, so wird

(4) $\quad \mu = \mp (1.44 \mp 0.49)$ d. i. $\mp (0.95 \ldots 1.93)$.

Der wahrscheinliche Fehler ergiebt sich durch

Abzählen gleich	1.04	(5)
Dagegen berechnet er sich aus ϑ (Annahme III) zu	0.97	(5)
und aus μ „ „ „	0.82	(5)

§. 5.

Uebersicht der verschiedenen Formen der Ausgleichungsaufgaben. Plausibelste Werthe der Unbekannten und der Verbesserungen der auszugleichenden Beobachtungswerthe; Fehlergleichungen.

I. Directe Beobachtungen. Die einfachste Form der Aufgabe ist diejenige, welche sie annimmt, wenn sogenannte directe Beobachtungen einer unbekannten Grösse gegeben sind: Man versteht darunter, im engern Sinne, wiederholte

unmittelbare Messungen einer Grösse; im weitern Sinne auch wiederholte mittelbare Messungen, wenn nur dieselben immer vollkommen unabhängig von einander durchgeführt worden sind.

Seien $l_1\ l_2\ l_3$ beispielsweise die Beobachtungsergebnisse, so ist unsere Aufgabe, aus denselben einen Werth x abzuleiten, der dem wahren Werthe X möglichst nahe kommt.

x nennen wir den plausibelsten Werth der Unbekannten. Derselbe weicht von $l_1\ l_2\ l_3$ um Grössen $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ ab, um welche diese verbessert werden müssen, damit sie unter sich und mit x übereinstimmen:

$\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ nennt man die plausibelsten Verbesserungen, auch übrigbleibenden Beobachtungsfehler;

$l_1 + \lambda_1,\ l_2 + \lambda_2,\ l_3 + \lambda_3$ heissen die ausgeglichenen Beobachtungswerthe.

Man hat ohne Weiteres die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + x \\ \lambda_2 &= -l_2 + x \\ \lambda_3 &= -l_3 + x \end{aligned} \qquad (1)$$

welche wir Fehlergleichungen nennen wollen. Da nun schon eine dieser Gleichungen ($\lambda = 0$ gesetzt) ausreicht zu einer Bestimmung der Unbekannten, so sind $3 - 1$ der Gleichungen und Messungen überschüssig. Allgemein bei n directen Beobachtungen sind $n - 1$ überschüssige Beobachtungen und Gleichungen vorhanden.

Für den wahren Werth der Unbekannten und die wahren Verbesserungen der Beobachtungsfehler (ihrem Vorzeichen nach ebenfalls im Sinne von Verbesserungen der Beobachtungswerthe genommen) hat man die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -l_1 + X \\ \varepsilon_2 &= -l_2 + X \\ \varepsilon_3 &= -l_3 + X \end{aligned} \qquad (2)$$

welche Gleichungen zwar X nicht finden lassen, sich aber doch auch von Nutzen erweisen werden.

Um Zahlenwerthe zu erhalten, geben wir ein Beispiel.

Beispiel 1. Beim Gebrauche der Nivellirinstrumente mit umlegbaren Fernrohre kommt der Einfluss in Frage, welchen eine Ungleichheit der Ringdurchmesser auf den Winkel zwischen Fernrohraxe und Libellenaxe hat.

Mit Hülfe einer Setzlibelle lässt sich derselbe ausmitteln: Liest man die Setzlibelle ab und legt das Fernrohr alsdann in den Lagern um und setzt die Libelle wieder auf, so ist der Ausschlag der Libelle der vierfache Betrag der gesuchten Grösse. Um die Aenderungen während des Umlegens in der Lage des Fernrohrträgers kennen zu lernen, ist es zweckmässig, noch eine Libelle vorher und nachher abzulesen, die an dem Fernrohrträger befestigt ist.

So erhielt Verfasser für ein Stampfer'sches Nivellirinstrument (Nr. 1864 von Starke und Kammerer in Wien, Eigenthum der polytechn. Schule in Aachen) u. A. für eine Messung folgende Libellenablesungen:

(1)

Objectivende	Feste Libelle		Setzlibelle	
	links	rechts	links	rechts
links	8.1	14.15	14.1	7.15
rechts	11.2	10.95	15.9	4.9

Ist nun ein Libellentheil der Setzlibelle gleich o Bogensecunden und ein Libellentheil der festen Libelle gleich u Bogensecunden, so folgt zunächst der Stand der Setzlibelle reducirt auf den Stand Null der festen Libelle für

$$\text{Objectivende links } 3.48\, o + 3.03\, u$$
$$\text{„ rechts } 5.50\, o - 0.13\, u$$

und daraus

$$\frac{\text{Obj. l.} - \text{Obj. r.}}{4} = -2.02\,\frac{o}{4} + 3.16\,\frac{u}{4}$$

d. i. für

$$o = 5.93 \qquad u = 5.40$$

(2)
$$\frac{\text{Obj. l.} - \text{Obj. r.}}{4} = +1''.27.$$

Ist die Visiraxe centrirt und die Setzlibelle als solche justirt, so ist hiernach der Winkel zwischen Libellenaxe und Visiraxe $+ 1''.27$ und zwar convergiren beide Axen gegen das Ocularende des Fernrohrs hin.

Es wurden noch 3 Versuche gemacht und erhalten die Beobachtungswerthe (denjenigen nach (2) nochmals aufgeführt)

$$(3)\qquad \begin{aligned} l_1 &= +1.27 \\ l_2 &= -0.78 \\ l_3 &= +0.11 \\ l_4 &= -0.71. \end{aligned}$$

Die Fehlergleichungen sind

$$(4)\qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= -1.27 + x \\ \lambda_2 &= +0.78 + x \\ \lambda_3 &= -0.11 + x \\ \lambda_4 &= +0.71 + x. \end{aligned}$$

Bei dieser einfachen Aufgabe scheint es keinem Zweifel zu unterliegen, dass als plausibelster Werth x das arithmetische Mittel der 4 Messungsergebnisse genommen werden muss:

$$(5)\qquad x = \frac{+1.27 - 0.78 + 0.11 - 0.71}{4} = -0''.03$$

womit werden

$$(6)\qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= -1.30 \\ \lambda_2 &= +0.75 \\ \lambda_3 &= -0.14 \\ \lambda_4 &= +0.68. \end{aligned}$$

Die Summe der λ ist -0.01 d. i. gleich Null zu rechnen; man sieht leicht ein, dass dies kein Zufall, sondern nothwendige Folge der Annahme des arithmetischen Mittels $\frac{[l]}{4}$ für x ist.

Wären die λ die wahren Fehler ε, so hätten wir als Durchschnittsfehler einer Messung

$$(7)\qquad \mp\frac{1.30 + 0.75 + 0.14 + 0.68}{4} \text{ d. i. } \mp\frac{2''.85}{4} \text{ d. i. } \mp 0''.71$$

und als mittlern zu befürchtenden Fehler einer Messung

$$(8)\qquad \mp\sqrt{\frac{1.30^2 + 0.75^2 + 0.14^2 + 0.68^2}{4}} \text{ d. i. } \mp\sqrt{\frac{2.73}{4}} \text{ d. i. } \mp 0''.83.$$

Indessen sind diese Werthe nur die durchschnittliche uud die mittlere Abweichung vom arithmetischen Mittel.

Dagegen wird sich später finden, dass man zu setzen hat für den durchschnittlichen Beobachtungsfehler (durchschnittliche Abweichung von der Wahrheit):

$$(7^*) \qquad \vartheta = \mp \frac{2.85}{\sqrt{4(4-1)}} \text{ d. i. } \mp 0''.82$$

und für den mittlern zu befürchtenden Beobachtungsfehler (mittlere zu befürchtende Abweichung von der Wahrheit):

$$(8^*) \qquad \mu = \mp \sqrt{\frac{2.73}{4-1}} \text{ d. i. } \mp 0''.95$$

μ wird also gerade so bestimmt, als wäre $[\lambda\lambda]$ aus sovielen wahren Fehlern ε abgeleitet, als überschüssige Messungen vorhanden sind.

Das Verhältniss von $\vartheta : \mu$, welches früher für verschiedene $\varphi(\varepsilon)$ theoretisch berechnet wurde, ergiebt sich hier zu 1.16:

$$(9) \qquad \mu = 1.16\,\vartheta$$

was im Hinblick auf die wegen der geringen Beobachtungsanzahl nur unbedeutende Sicherheit dieser Bestimmung als einem zufälligen Fehlergesetz nicht widersprechend angesehen werden darf.

II. Vermittelnde Beobachtungen werden solche Messungen genannt, welche sich auf verschiedene Grössen beziehen, die aber sämmtlich Functionen eines und desselben Systems von Unbekannten sind, um deren Bestimmung es sich handelt.

Zur Erläuterung diene folgendes einfache

Beispiel 2. Auf dem Standpunkte D' seines Dreiecksnetzes bei Speyer wurden von Prof. Schwerd zwischen den Objecten $ABWHN$ durch das Repetitionsverfahren folgende Winkel gemessen (vergl. „Die kleine Speyerer Basis", Speyer 1822):

(1)

BA	90	Repetitionen	$19^0\ 25'\ 59''.42 + \lambda_1$
BW	80	„	$34^0\ 18'\ 43''.61 + \lambda_2$
AW	70	„	$14^0\ 52'\ 44''.33 + \lambda_3$
HW	20	„	$15^0\ 34'\ 58''.80 + \lambda_4$
BH	20	„	$18^0\ 43'\ 45''.60 + \lambda_5$
NA	40	„	$12^0\ 26'\ 24''.65 + \lambda_6$
BN	60	„	$6^0\ 59'\ 34''.51 + \lambda_7$
NH	20	„	$11^0\ 44'\ 11''.60 + \lambda_8$

Den Beobachtungswerthen sind hierbei gleich die noch unbekannten plausibelsten Verbesserungen beigefügt worden.

Bezeichnen wir nun die plausibelsten Werthe der Winkel

(2)

$$\begin{aligned} BN &\text{ mit } x \\ BH &\text{ „ } y \\ BA &\text{ „ } z \\ BW &\text{ „ } t \end{aligned}$$

so sind alle gemessenen Winkel theils Beobachtungen von $x\ y\ z\ t$ selbst, theils von Summen und Differenzen derselben also sogenannte Summenwinkel. Drückt man jetzt alle in (1) gegebenen plausibelsten Winkelwerthe durch $x\ y\ z\ t$ aus, so erhält man folgende Fehlergleichungen:

(3)

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\ 19^0\ 25'\ 59''.42 \quad . \quad . + z \quad . \\ \lambda_2 &= -\ 34^0\ 18'\ 43''.61 \quad . \quad . \quad . + t \\ \lambda_3 &= -\ 14^0\ 52'\ 44''.33 \quad . \quad . - z + t \\ \lambda_4 &= -\ 15^0\ 34'\ 58''.80 \quad . \quad - y \quad . + t \\ \lambda_5 &= -\ 18^0\ 43'\ 45''.60 \quad . \quad + y \quad . \quad . \\ \lambda_6 &= -\ 12^0\ 26'\ 24''.65 - x \quad . + z \quad . \\ \lambda_7 &= -\ \ 6^0\ 59'\ 34''.51 + x \quad . \quad . \quad . \\ \lambda_8 &= -\ 11^0\ 44'\ 11''.60 - x + y \quad . \quad . \end{aligned}$$

Die Unbekannten sind hiernach direct beobachtet zu

(4)

$$\begin{aligned} x &= \ \ 6^0\ 59'\ 34''.51 + \xi \\ y &= 18^0\ 43'\ 45''.60 + \eta \\ z &= 19^0\ 25'\ 59''.42 + \zeta \\ t &= 34^0\ 18'\ 43''.61 + \tau \end{aligned}$$

zu welchen Beobachtungswerthen rechts noch Verbesserungen beigefügt sind. Um nämlich die allen Messungen möglichst entsprechenden Werthe der 4 Unbekannten zu erhalten, werden wir die aus den directen Beobachtungen für dieselben abgeleiteten Werthe etwas abändern müssen um kleine Beträge resp. $\xi\ \eta\ \zeta\ \tau$. Die Anzahl der überschüssigen Messungen ist offenbar 8 — 4 d. i. 4.

Durch Einführung der (4) in (3) ergiebt sich:

$$
(5)\qquad
\begin{array}{lllllll}
\lambda_1 = & 0''.00 & . & . & +\zeta & . & \\
\lambda_2 = & 0''.00 & . & . & . & +\tau & \\
\lambda_3 = & -0''.14 & . & . & -\zeta & +\tau & \\
\lambda_4 = & -0''.79 & . & -\eta & . & +\tau & \\
\lambda_5 = & 0''.00 & . & +\eta & . & . & \\
\lambda_6 = & +0''.26 & -\xi & . & +\zeta & . & \\
\lambda_7 = & 0''.00 & +\xi & . & . & . & \\
\lambda_8 = & -0''.51 & -\xi & +\eta & . & . & .
\end{array}
$$

Aus diesen 8 Fehlergleichungen sind die plausibelsten Werthe für $\xi\ \eta\ \zeta\ \tau$ abzuleiten. Dabei ist zu berücksichtigen, dass den Beobachtungswerthen und also den λ ungleiche Repetitionszahlen entsprechen, daher auch die Genauigkeit eine verschiedene ist. Zunächst wollen wir aber davon ganz absehen und gleiche Genauigkeit beilegen, um die Aufgabe zu vereinfachen. Indessen wissen wir auch nunmehr ohne Weiteres noch keinen Weg zur Lösung der Aufgabe einzuschlagen, wie in Beispiel 1., wo uns gewissermaassen das Gefühl leitete. Dieses lässt der grössern Complication der Aufgabe wegen uns jetzt im Stich.

Die Methode der kleinsten Quadrate wird uns nun zeigen, dass in folgender Weise vorzugehen ist:

a. Man multiplicire die rechte Seite jeder Fehlergleichung mit dem Coefficienten von ξ, addire die Producte und setze die Summe gleich Null:

$$
\begin{array}{rllll}
 & -0.26 & +\xi & . & -\zeta\ . \\
 & 0.00 & +\xi & . & .\ . \\
 & +0.51 & +\xi & -\eta & .\ . \\
\hline
0 = & +0.25 & +3\xi & -\eta & -\zeta\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (a)
\end{array}
$$

b. Man wiederhole das in Bezug auf die Coefficienten von η:

$$\begin{array}{r} +0.79 \;.\; +\eta \;.\; -\tau \\ 0.00 \;.\; +\eta \;.\; . \\ -0.51 -\xi +\eta \;.\; . \\ \hline 0 = +0.28 -\xi +3\eta \;.\; -\tau \end{array} \quad \ldots \quad (b)$$

c. Ebenso für ξ:

$$\begin{array}{r} 0.00 \;.\; . \;+\xi\; . \\ +0.14 \;.\; . \;+\xi -\tau \\ +0.26 -\xi \;.\; +\xi \;. \\ \hline 0 = +0.40 -\xi \;.\; +3\xi -\tau \end{array} \quad \ldots \quad (c)$$

d. Ebenso für τ:

$$\begin{array}{r} 0.00 \;.\; . \;.\; +\tau \\ -0.14 \;.\; . \;-\xi +\tau \\ -0.79 \;.\; -\eta \;.\; +\tau \\ \hline 0 = -0.93 \;.\; -\eta -\xi +3\tau \end{array} \quad \ldots \quad (d)$$

Dadurch erhält man im Ganzen zur Bestimmung der 4 Unbekannten 4 Gleichungen (*a. b. c. d*), die wir noch zusammenstellen:

$$(6) \qquad \begin{array}{ll} (a) & 0 = +0.25 +3\xi -\eta -\xi \;. \\ (b) & 0 = +0.28 -\xi +3\eta \;.\; -\tau \\ (c) & 0 = +0.40 -\xi \;.\; +3\xi -\tau \\ (d) & 0 = -0.93 \;.\; -\eta -\xi +3\tau \end{array}$$

Hieraus folgt durch Elimination von ξ und τ aus (*b*) sowie (*c*) mittelst (*a*) und (*d*):

$$0 = +0.16 +7\eta -2\xi$$
$$0 = +0.52 -2\eta +7\xi$$

womit sich ergeben

$$\xi = -0''.088 \quad \eta = -0''.048$$

und damit ist weiter (7)

$$\xi = -0''.129 \quad \tau = +0''.265$$

es sind also hiermit nach (4) die plausibelsten Werthe der Unbekannten gleich:

$$
\begin{aligned}
x &= 6^0\,59'\,34''.381 \\
y &= 18^0\,43'\,45''.552 \\
z &= 19^0\,25'\,59''.332 \\
t &= 34^0\,18'\,43''.875.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Die plausibelsten Verbesserungen λ werden nach (5) und (7) gleich:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= -\,0''.088 & \lambda_5 &= -\,0''.048 \\
\lambda_2 &= +\,0''.265 & \lambda_6 &= +\,0''.301 \\
\lambda_3 &= +\,0''.213 & \lambda_7 &= -\,0''.129 \\
\lambda_4 &= -\,0''.477 & \lambda_8 &= -\,0''.429
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Die ausgeglichenen Beobachtungswerthe sind nach (1) und (9):

$$
\begin{aligned}
BA &\quad 19^0\,25'\,59''.332 \\
BW &\quad 34^0\,18'\,43''.875 \\
AW &\quad 14^0\,52'\,44''.543 \\
HW &\quad 15^0\,34'\,58''.323 \\
BH &\quad 18^0\,43'\,45''.552 \\
NA &\quad 12^0\,26'\,24''.951 \\
BN &\quad 6^0\,59'\,34''.381 \\
NH &\quad 11^0\,44'\,11''.171
\end{aligned}
\tag{10}
$$

welche sich nicht mehr widersprechen, indem beispielsweise die Zahlenwerthe für BA und AW zusammen genau den Zahlenwerth BW ergeben.

Die Summe der λ, $[\lambda] = -\,1.171 + 0.779$ d. i. $-\,0.392$. Der in Beisp. 1. stattfindende Umstand, dass $[\lambda]$ nothwendig Null wurde, findet hier nicht statt.

Ferner ist

$$
\begin{aligned}
[\text{val. abs. } \lambda] &= 1.950 \\
[\lambda\lambda] &= 0.6445.
\end{aligned}
$$

Um hiermit ϑ und μ zu berechnen, ist zu bedenken, dass die λ die wahren Beobachtungsfehler selbst nicht sind. Nach später abzuleitenden Formeln wird jetzt

$$
\begin{aligned}
\vartheta &= \mp \frac{1.950}{\sqrt{8\,(8-4)}} \text{ d. i. } \mp 0''.345 \\
\mu &= \mp \sqrt{\frac{0.6445}{8-4}} \text{ d. i. } \mp 0''.401
\end{aligned}
\tag{11}
$$

μ wird gerade so gebildet, als sei $[\lambda\lambda]$ aus sovielen wahren Fehlern gebildet, als überschüssige Messungen vorhanden sind. Da die Anzahl der letztern nur 4, also gering ist, so kann die Relation

(12) $$\mu = 1.17\vartheta$$

als genügend übereinstimmend mit den früheren theoretischen Ermittelungen für zufällige Fehlergesetze betrachtet werden.

Die Fehlergleichungen für vermittelnde Beobachtungen im Allgemeinen haben folgende Form:

(3)
$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = -l_1 + a_1x + b_1y + c_1z \\ \lambda_2 = -l_2 + a_2x + b_2y + c_2z \\ \lambda_3 = -l_3 + a_3x + b_3y + c_3z \\ \lambda_4 = -l_4 + a_4x + b_4y + c_4z \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \hline (n) \end{array} \quad (m)$$

für n Beobachtungswerthe l und m Unbekannte $x\ y\ z$. Die Coefficienten $a\ b\ c$ sind gegebene Grössen, welche als fehlerfrei vorausgesetzt werden.

Insofern man jede der Formen $ax + by + cz$ als speciellen Werth einer Function der Variablen $a\ b\ c$ und der Constanten $x\ y\ z$ ansehen kann, ist man berechtigt, die Unbekannten der Aufgabe zu nennen: die (durch vermittelnde Beobachtungen zu bestimmenden) Constanten derselben.

Eine Ausgleichungsaufgabe liegt nur solange vor, als die Anzahl n der Gleichungen (3) grösser ist als die Anzahl m der Unbekannten; mit andern Worten: solange die Anzahl der überschüssigen Messungen $n - m >$ Null ist.

Für $n = m$ ist die Aufgabe bestimmt und in diesem Falle geben die (3) die Unbekannten, indem man die λ zu Null annimmt und in gewöhnlicher Weise die n Gleichungen nach n Unbekannten auflöst. Da hier jede Controlle fehlt, so geht der ganze Beobachtungsfehler der n Messungsergebnisse in die Werthe der n Unbekannten ein.

Die Aufgabe ist nur unvollständig bestimmt für $n < m$.

Haben einzelne der Fehlergleichungen gleiche Coeffi-

cientensysteme $a\,b\,c$, so muss vor der Beurtheilung der Frage, ob die Aufgabe bestimmt oder unbestimmt ist, jede Gruppe mit gleichen Coefficientensystemen zu einem Mittel vereinigt gedacht werden und die Anzahl n' der Gruppen ist nun mit m zu vergleichen. Ist nämlich beispielsweise für die beiden ersten (3)

$$a_1 = a_2 \quad b_1 = b_2 \quad c_1 = c_2 \quad . \quad . \quad . \quad .$$

so geben die beiden ersten Beobachtungen zwar eine gegenseitige Controlle, da sie sich auf dieselbe Grösse $a_1 x + b_1 y + c_1 z = a_2 x + b_2 y + c_2 z$ beziehen; es ist jedoch durch die zweite Messung nichts gewonnen, um die Werthe $x\ y\ z$ getrennt von einander kennen zu lernen.

Ebenso ist es, wenn die Coefficientensysteme zwar nicht gleich, aber einander proportinal sind; also beispielsweise

$$a_1 : b_1 : c_1 \ . \ . = a_2 : b_2 : c_2 \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Den Fehlergleichungen (3) für die plausibelsten Werthe der Unbekannten und Fehler stehen gegenüber ebensoviele Gleichungen zwischen den wahren Werthen der Unbekannten und den wahren Werthen der Fehler:

$$(4) \qquad \left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -l_1 + a_1 X + b_1 Y + c_1 Z \\ \varepsilon_2 &= -l_2 + a_2 X + b_2 Y + c_2 Z \\ \varepsilon_3 &= -l_3 + a_3 X + b_3 Y + c_3 Z \\ \varepsilon_4 &= -l_4 + a_4 X + b_4 Y + c_4 Z \end{aligned}\right| \begin{matrix}(m)\\ \\ \\ \\ \hline (n)\end{matrix}$$

Obgleich $X\,Y\,Z$ und die ε sich nicht finden lassen, so giebt doch die Methode der kl. Qu. ein Mittel an die Hand, sich diesen Grössen möglichst zu nähern unter gewissen Voraussetzungen über das Fehlergesetz $\varphi(\varepsilon)$. Sie lehrt auch aus den λ den durchschnittlichen und mittlern zu befürchtenden Werth der ε finden (Beisp. 2. (11)), sowie, wie wir später sehen werden, die mittlere zu befürchtende Abweichung zwischen $x\,y\,z$ und resp. $X\,Y\,Z$.

III. Man spricht von bedingten Beobachtungen, wenn zwischen den wahren Werthen der Beobachtungsgrössen sogenannte, auch von deren ausgeglichenen Werthen streng zu erfüllende, Bedingungsgleichungen, bestehen. Wir nehmen zur Erläuterung wieder ein einfaches Beispiel vor.

Beispiel 3. Prof. Schwerd erhielt in dem Dreieck DHJ seines Dreiecksnetzes (Beisp. 2.) die Winkel

$$
(1)\qquad
\begin{array}{lll}
H: & 81^0\,21'\,43''.36 & 70 \text{ Mal repetirt} \\
J: & 25^0\,16'\,28''.85 & 101 \;\;\text{„}\;\;\;\;\text{„} \\
D: & 73^0\,21'\,46''.35 & 85 \;\;\text{„}\;\;\;\;\text{„}
\end{array}
$$

Die Länge der Seite HD ist $4962^m.8282$, die theoretische Winkelsumme des Dreiecks weicht mithin jedenfalls schon merkbar von 180^0 ab: den sphärischen Excess desselben berechnen wir nach der Formel

$$(2)\qquad \text{Sphär. Excess in Sec.} = \frac{\text{Inhalt des Dr.}}{\text{Quadrat des Erdradius}} \cdot 206265$$

wofür jetzt log Inhalt $= 7.4365$ für Quadratmeter ist und als Erdradius der Werth num log 6.8046 (streng gültig für 45^0 geographische Breite und ein mittleres Azimut) genommen werden darf. Es folgt

$$(2^*)\qquad \log \text{Excess} = 7.4365 - 8.2949 \quad \text{Excess} = 0''.139.$$

Die theoretische Winkelsumme ist daher $180^0\;\;0'\;\;0''.139$, hingegen hat man aus (1) für die beobachtete $179^0\,59'\,58''.56$;

$$\text{Unterschied} = 1''.579.$$

Nennen wir die 3 Beobachtungswerthe $l_1\; l_2\; l_3$ und $\lambda_1\; \lambda_2\; \lambda_3$ ihre plausibelsten Verbesserungen, so hat man darnach

$$
\begin{aligned}
180^0\,0'\,0''.139 &= (l_1 + \lambda_1) + (l_2 + \lambda_2) + l_3 + \lambda_3) \\
&= 179^0\;59'\;58''.56 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3
\end{aligned}
$$

also wird die Bedingungsgleichung für die Fehler:

$$(3)\qquad 0 = -1.579 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3.$$

Wenn wir nun die drei Beobachtungen als gleich genau voraussetzen ohne Rücksicht auf die verschiedenen Repetitionszahlen, so kann sofort das Endresultat hingeschrieben werden, denn es ist kein Grund vorhanden, die λ verschieden anzunehmen und wir setzen daher

$$(4)\qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1.579}{3} = 0''.526$$

womit die ausgeglichenen Beobachtungswerthe sich ergeben zu

$$\begin{array}{r} 81^0\ 21'\ 43''.886 \\ 25^0\ 16'\ 29''.376 \\ 73^0\ 21'\ 46''.876 \\ \hline 180^0\ \ 0'\ \ 0''.138 \end{array}$$

Nicht so einfach wird die Lösung bei Berücksichtigung der ungleichen Genauigkeit der 3 Messungsresultate l oder in Fällen, wo mehr als eine Bedingungsgleichung auftritt. Darauf gehen wir jetzt nicht weiter ein, sondern schreiben nur noch die allgemeine Form auf, unter welcher die Aufgabe III sich darbietet.

Seien $l_1\ l_2\ l_3\ l_4$ die Beobachtungswerthe,
$\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3\ \varepsilon_4$ ihre wahren Verbesserungen,
$\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_4$ ihre plausibelsten Verbesserungen,

so sollen die n verbesserten Beobachtungswerthe die r Bedingungsgleichungen

$$(5)\quad \left.\begin{array}{l} 0 = p_0 + p_1(l_1+\varepsilon_1) + p_2(l_2+\varepsilon_2) + p_3(l_3+\varepsilon_3) + p_4(l_4+\varepsilon_4) \\ 0 = q_0 + q_1(l_1+\varepsilon_1) + q_2(l_2+\varepsilon_2) + q_3(l_3+\varepsilon_3) + q_4(l_4+\varepsilon_4) \\ 0 = r_0 + r_1(l_1+\varepsilon_1) + r_2(l_2+\varepsilon_2) + r_3(l_3+\varepsilon_3) + r_4(l_4+\varepsilon_4) \end{array}\right| \begin{array}{l}(n)\\ \\ \\ (r)\end{array}$$

erfüllen, worin die Coefficienten $p\ q\ r$ gegebene Zahlen bezeichnen. Denken wir uns zunächst die Ausdrücke

$$(6)\quad \left.\begin{array}{l} w_1 = p_0 + p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 + p_4 l_4 \\ w_2 = q_0 + q_1 l_1 + q_2 l_2 + q_3 l_3 + q_4 l_4 \\ w_3 = r_0 + r_1 l_1 + r_2 l_2 + r_3 l_3 + r_4 l_4 \end{array}\right| \begin{array}{l}(n)\\ \\ \\ (r)\end{array}$$

berechnet, so nehmen die Bedingungsgleichungen die Form an

$$(7)\quad \left.\begin{array}{l} 0 = w_1 + p_1\varepsilon_1 + p_2\varepsilon_2 + p_3\varepsilon_3 + p_4\varepsilon_4 \\ 0 = w_2 + q_1\varepsilon_1 + q_2\varepsilon_2 + q_3\varepsilon_3 + q_4\varepsilon_4 \\ 0 = w_3 + r_1\varepsilon_1 + r_2\varepsilon_2 + r_3\varepsilon_3 + r_4\varepsilon_4 \end{array}\right| \begin{array}{l}(n)\\ \\ \\ (r)\end{array}.$$

Die wahren Fehler ε können wir nur finden für $r = n$; doch hat man in dem Falle keine Ausgleichungsaufgabe mehr, sondern aus r Gleichungen r Unbekannte zu bestimmen. Für $r > n$ giebt die Aufgabe im Allgemeinen zu viel

Bedingungen, die sich nicht gleichzeitig erfüllen lassen, doch kann man alsdann die ε auffassen als zu bestimmende Constanten vermittelnder Beobachtungsgrössen w. Uebrigens sind die Fälle $r \gtrless n$ ohne praktischen Werth.

Uns interessirt besonders der Fall $r < n$, für welchen zur Bestimmung der ε offenbar zu wenig gegeben ist. Aber die M. d. kl. Qu. zeigt, wie man ein System von Verbesserungen λ finden kann, die die Gleichungen

$$(8)\qquad \left.\begin{aligned} 0 &= w_1 + p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + p_3\lambda_3 + p_4\lambda_4 \\ 0 &= w_2 + q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 + q_3\lambda_3 + q_4\lambda_4 \end{aligned}\right| (n)$$
$$\underline{\qquad 0 = w_3 + r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2 + r_3\lambda_3 + r_4\lambda_4 \qquad |}$$
$$(r)$$

erfüllen und die zugleich als die plausibelsten erscheinen.

Da man nun mittelst der r Gleichungen (5), nachdem man in denselben die ε gleich Null gesetzt hat, immer r der Werthe l durch die $n-r$ andern ausdrücken und also berechnen kann, so sind r überschüssige Messungen vorhanden.

IV. Vermittelnde Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen. Eine für die Geodäsie wichtige Form der Ausgleichungsaufgabe entsteht aus Combination des Falles II mit einer Anzahl Bedingungsgleichungen, die (nicht zwischen den Beobachtungswerthen l, sondern) zwischen den zu ermittelnden Constanten der Fehlergleichungen bestehen müssen.

Mit Benutzung des bei Form II Gegebenen haben wir sonach die Gleichungen

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + a_1x + b_1y + c_1z \\ \lambda_2 &= -l_2 + a_2x + b_2y + c_2z \\ \lambda_3 &= -l_3 + a_3x + b_3y + c_3z \\ \lambda_4 &= -l_4 + a_4x + b_4y + c_4z \end{aligned}\right| (m)$$
$$\underline{\qquad\qquad (n) \qquad\qquad}$$
$$\left.\begin{aligned} 0 &= p_0 + p_1x + p_2y + p_3z \\ 0 &= q_0 + q_1x + q_2y + q_3z \end{aligned}\right| (m)$$
$$\underline{\qquad\qquad (r) \qquad\qquad}$$

zur Lösung der Aufgabe. Dabei ist nothwendige Voraussetzung, dass

$$r < m \text{ und } n > m - r$$

oder zusammengefasst

(10) $$n > m - r > 0$$

Ist nämlich $r < m$, so lassen sich aus den r Bedingungsgleichungen immer r von den Unbekannten durch die $m - r$ andern ausdrücken und durch Einführung dieser Werthe in die n Fehlergleichungen aus diesen jene r Unbekannten eliminiren, so dass die n Beobachtungen $m - r$ Unbekannte zu bestimmen haben, wesshalb $n > m - r$ sein muss. Die Anzahl der überschüssigen Messungen ist $n-(m-r)$ d. i. $n+r-m$. $n=m-r$ giebt eine bestimmte, $n<m-r$ eine unvollständige Aufgabe.

Die Fälle $r \lessgtr m$ gestalten sich im Wesentlichen wie die entsprechenden in III und sind wie diese ohne praktische Bedeutung.

V. Die bisher erwähnten Formen der Ausgleichungsaufgabe können als Specialfälle der folgenden allgemeinen Aufgabe betrachtet werden. Es sind die Verbesserungen λ aus den Gleichungen zu bestimmen:

$$\begin{array}{l} 0 = w_1 + p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + p_3\lambda_3 + p_4\lambda_4 \ldots (n) + a_1 x + b_1 y \ldots (m) \\ 0 = w_2 + q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 + q_3\lambda_3 + q_4\lambda_4 \ldots (n) + a_2 x + b_2 y \ldots (m) \\ 0 = w_3 + r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2 + r_3\lambda_3 + r_4\lambda_4 \ldots (n) + a_3 x + b_3 y \ldots (m) \\ \hline (r) \end{array} \quad (11)$$

worin die w und die Coefficienten $pqrab$ die frühere Bedeutung haben. Eine Ausgleichung ist nur für $r > m$ möglich; $r=m$ giebt eine bestimmte Aufgabe mit $\lambda =$ Null, $r < m$ eine unvollständige Aufgabe. Ist nun $r > m$, so kann man die m Unbekannten eliminiren und es bleiben dann $r - m$ Bedingungsgleichungen mit n Fehlergrössen; es muss daher für eine Ausgleichung

$$n > r - m$$

sein, d. h. mit der vorigen Ungleichung verbunden:

(12) $$n > r - m > 0.$$

VI. Im Folgenden werden wir die 5 erwähnten Formen einzeln betrachten; zwar lassen sich dieselben alle auf eine der Formen II oder III reduciren, aber es hat der Bequem-

lichkeit der Rechnung wegen oft Werth, die unmittelbar dargebotene Form direct anzuwenden. Auf die Endresultate hat es selbstredend keinen Einfluss, ob nach der einen oder andern Form gerechnet wird, da die Ausgleichung nach der Methode d. kl. Quadrate den von den Beobachtungswerthen zu erfüllenden Relationen eine Bedingung zufügt, durch welche die Aufgabe eine bestimmte wird.

VII. Nichtlineare Relationen. Wir haben im Vorhergehenden allen Relationen eine lineare Form gegeben. Es genügt dies, da andere Formen darauf zurückgeführt werden können; ja es führt der Rechnungsgang, welcher für lineare Formen bequem ist, in seiner Anwendung auf nichtlineare Formen doch auf lineare Gleichungen.

VIII. Functionen direct beobachteter Grössen. Ehe wir auf die erwähnten Ausgleichungsaufgaben näher eingehen, ist noch eines Falles zu erwähnen, der als Umkehrung der Form II angesehen werden kann. Wurden daselbst mittelst directer Beobachtungen Functionswerthe der unbekannten Constanten bestimmt, so werden hier unbekannte Functionswerthe mittelst directer Beobachtung der Constanten ermittelt. Zwar giebt dies keine Ausgleichung, aber doch einen Theil einer solchen, nämlich die Berechnung der Genauigkeit des berechneten Functionswerthes aus den Genauigkeiten der beobachteten Grössen. Wir wenden uns zunächst dieser Aufgabe zu und setzen dabei voraus, dass die Beobachtungen unabhängig von einander erfolgt sind, die Beobachtungswerthe also nicht etwa durch Rechnung aus theilweise denselben Beobachtungsdaten abgeleitet wurden.

§. 6.

Mittlerer Fehler einer Function unabhängig von einander bestimmter Grössen. Zusammensetzung des mittlern Fehlers aus den mittlern Beträgen der Einwirkung mehrerer unabhängiger Fehlerursachen.

Wir setzen in diesem §. voraus, dass das Gesetz des Vorkommens der Fehler, wenn nicht allen Bedingungen für zufällige Fehler, so doch der ersten Bedingung für dieselben (§. 2. (1*)) entspreche.

I. Ist die Function f ein Vielfaches von dem Beobachtungswerthe l, also

(1) $$f = \alpha l$$

worin α ein gegebener Zahlencoefficient, so entspricht einem Fehler ε in l ein Fehler $\alpha\varepsilon$ in f und es ist daher das Quadrat des mittlern Fehlers in f

(2) $$\mu_f{}^2 = \alpha^2\mu^2 \text{ und } \mu_f = \alpha\mu.$$

Nehmen wir beispielsweise

(3) $$f = 3l$$

so ergiebt sich

(4) $$\mu_f = 3\mu.$$

II. Sei ferner allgemeiner

(5) $$f = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 + \ldots$$

eine lineare Function der unabhängig von einander ermittelten Beobachtungswerthe $l_1\ l_2\ l_3\ \ldots$, wobei $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \ldots$ gegebene Zahlencoefficienten bedeuten. Der wahre Werth von f, den wir mit F bezeichnen wollen, ergiebt sich aus Formel (5) durch Einführung der verbesserten Beobachtungswerthe $l + \varepsilon$:

$$F = \alpha_1(l_1 + \varepsilon_1) + \alpha_2(l_2 + \varepsilon_2) + \alpha_3(l_3 + \varepsilon_3) + \ldots.$$

womit der wahre Fehler in f folgt zu

$$F - f = \alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + \alpha_3\varepsilon_3 + \ldots.$$

Um den mittlern Fehler in f zu erhalten, bilden wir zunächst das Quadrat

$$(F - f)^2 = \alpha_1{}^2\varepsilon_1{}^2 + \alpha_2{}^2\varepsilon_2{}^2 + \alpha_3{}^2\varepsilon_3{}^2 + \ldots + R$$

worin R die Summe der doppelten Producte je zweier $\alpha\varepsilon$ mit verschiedenen Indices vorstellt. Denken wir uns nun für alle möglichen Werthe von $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3\ \ldots$ dieses Quadrat gebildet und aus allen das Mittel genommen, so erhalten wir links das Quadrat des mittlern Fehlers in f und rechts die durchschnittlichen Werthe der einzelnen Glieder. Der durchschnittliche Werth jedes der Glieder von der Form $\alpha_i{}^2\varepsilon_i{}^2$ ist aber $\alpha_i{}^2\mu_i{}^2$, wenn μ_i der mittlere Werth von ε_i d. i. der mittlere Fehler von l_i ist. Man hat daher für den m. F. in f

(6) $$\mu_f{}^2 = \alpha_1{}^2\mu_1{}^2 + \alpha_2{}^2\mu_2{}^2 + \alpha_3{}^2\mu_3{}^2 + \ldots$$

weil der durchschnittliche Werth von R Null ist. Betrachten wir, um letzteres einzusehen, zunächst eines der Glieder von

R z. B. $2\alpha_1\alpha_2\varepsilon_1\varepsilon_2$ und bilden die Summe aller Werthe desselben, welche es bei gleichzeitiger Variation von ε_1 und ε_2 annimmt, so ergiebt sich schon dafür Null, denn irgend ein Werth von ε_2 kann sich ebenso wahrscheinlich mit einem positiven ε_1 als mit dem gleichgrossen negativen ε_1 verbinden und wird daher jeder Werth des Products $2\alpha_1\alpha_2\varepsilon_1\varepsilon_2$ durch einen gleichgrossen mit entgegengesetztem Vorzeichen aufgehoben. Weil nun dies für alle Glieder in R gilt, so müssen wir dessen durchschnittlichen Gesammtwerth Null setzen. Aus (6) folgt noch, abgekürzt geschrieben:

$$\mu_f = \mp \sqrt{[\alpha^2\mu^2]}. \tag{7}$$

Nehmen wir beispielsweise

$$f = l_1 + l_2 + l_3 \tag{8}$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$$

so ist

$$\mu_f = \mu\sqrt{3}. \tag{9}$$

(Nicht ohne Interesse ist es, dieses Ergebniss mit dem obigen für $f = 3l$ zu vergleichen.)

Wir knüpfen hieran zur Erläuterung zwei Beispiele.

Beispiel 4. Der Fehler der Längenmessung.

Ist die Länge eines Längenmessers (Messkette, Messstab, Messstange) gleich l und die Länge der gemessenen Linie $L = ln$, wo wir der Einfachheit halber n als ganze Zahl ansehen, so wird das Messungsergebniss behaftet sein mit den sämmtlichen Fehlern, welche den n Lagen des Längenmessers entsprechen. Bezeichnen wir mit $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$ die Verbesserungen der nominellen Angaben zu den wahren Werthen, so wird

$$L = l_1 + l_2 + \ldots + l_n + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n \tag{1}$$

in welcher Formel sehr nahe $l_1 = l_2 = \ldots = l_n = l$ ist.

Sind nun die ε zufällige Fehler, oder genügt das Gesetz ihres Vorkommens wenigstens der Bedingung $\varphi(+\varepsilon) = \varphi(-\varepsilon)$, so können wir den mittlern Fehler von L bilden. Derselbe ergiebt sich zu

$$\mu_L = \mu\sqrt{n} = \mu\sqrt{\frac{L}{l}} \tag{2}$$

worin μ den mittlern Werth der ε bezeichnet.

Wenn innerhalb gewisser Grenzen der Länge des Längenmessers μ sich nicht ändert, so ist es hiernach am vortheilhaftesten, die längste Form des Längenmessers zu nehmen, weil alsdann für dieselbe zu messende Länge L n am kleinsten wird.

Es gilt diese Bemerkung auch noch dann, wenn die ε der obigen Voraussetzung nicht genügen. Sind die ε vorherrschend positiv, aber unabhängig von der Länge des Längenmessers, so erkennt man auch ohne Rechnung, dass die Summe der ε in (1) mit der Anzahl derselben im Allgemeinen wachsen muss.

In der That haben die ε in der Regel nicht nur keinen zufälligen Charakter, sie sind sogar in vielen Fällen vorherrschend positiv oder negativ.

Eine Längenmessung wird nämlich fehlerhaft

1) wegen der Abweichung der nominellen Länge der Längenmesser für eine gewisse Temperatur von der wahren Länge;
2) wegen fehlerhafter Correction der gemessenen Länge wegen Temperatur, Neigung und Alignement (sowie eventuell wegen Deformirung) der Längenmesser;
3) wegen fehlerhafter Verbindung der aufeinanderfolgenden Lagen der Längenmesser.

Die 1. Ursache hat einen constanten Fehler zur Folge, der proportional der Länge L wächst.

Die Ursachen 2) geben leicht Veranlassung zu regelmässigen Fehlern:

Was zunächst die Correction wegen Temperatur anlangt, welche überhaupt erst für feinere Messungen nothwendig wird, so ist dazu genaue Kenntniss des Temperaturcoefficienten und der Temperatur des Längenmessers nöthig. Ein Fehler im Temperaturcoefficienten giebt einen regelmässigen Fehler; aber es gelingt immer, jenen so genau zu ermitteln, dass dieser nicht in Betracht kommt. Schwieriger ist es die jeweilige Temperatur zu ermitteln, weil die Lufttemperatur und die strahlende Wärme eine fortwährende Aenderung derselben bewirken und es fraglich bleibt, ob die Thermometer derselben genau folgen. Durch Um-

hüllungen hat man einestheils jene äussern Einflüsse möglichst abzuhalten versucht, anderntheils aber die Quecksilberthermometer tief in das Innere des Körpers vom Längenmesser versenkt, oder mit noch mehr Erfolg denselben nach Art der Metallthermometer eingerichtet, so dass er seine Temperatur selbst angeben kann, oder aber dass auf mechanischem Wege in demselben zwei Punkte construirt werden, zwischen denen die Länge frei vom Temperatureinflusse ist (Messstangen der Ordnance Survey von Grossbritanien). Den Metallthermometern giebt man wohl jetzt den Vorzug vor andern Einrichtungen, denn es ist nicht anzunehmen, dass sie ausser dem Ablesungsfehler einen vom Gange der Temperaturänderung abhängigen regelmässigen Fehler gäben.

Wird dem Längenmesser eine horizontale Lage in der Verticalebene der beiden festen Punkte, zwischen denen gemessen wird, gegeben, so wirkt jede Abweichung davon immer in demselben Sinne auf fehlerhafte Bestimmung der Länge, indem die Projection des fehlerhaft gerichteten Längenmessers kleiner ist, als die in Rechnung gezogene Länge. Dies gilt ebenso für eine wiederholt eintretende Deformirung. Durch geeignete Maassnahmen lässt sich jedoch der Einfluss der letztgenannten beiden Fehlerursachen beinahe auf jedes beliebige Minimum herabdrücken.

Die Ursache 3) ist sehr verschieden nach Art des Längenmessers und nach Art des Terrains:

Bei dem Messen mit der Kette entsteht leicht ein Fehler immer in demselben Sinne, indem der vorangehende Kettenstab nicht vertical gestellt wird, sondern durchgehends in derselben Weise schief, was um so leichter eintritt, je geneigter das Terrain ist (abgesehen von der sogenannten Terrainmessung auf der Oberfläche eines nahezu ebenen, aber geneigten Terrains).

In immer gleichem Sinne fehlerhaft wirkt auch ein zu kräftiges Anziehen der Kette, indem dadurch nicht nur die Kette gedehnt, sondern besonders der nachfolgende Kettenstab ein Stück vorwärts gezogen wird, wesshalb auf felsigem und auf weichem Boden namentlich Vorsicht nothwendig ist.

Bei dem Messen mit Stäben kann ein Fehler immer in demselben Sinne entstehen, wenn in horizontalem Terrain

die Stäbe aneinandergestossen werden, sodass der nachfolgende etwas zurückweicht; oder wenn in geneigtem Terrain das Ablothen des Endpunktes nach dem Augenmaasse erfolgt.

Bei dem Messen mit Messstangen und den Hülfsapparaten Messkeil, Messschieber oder Mikroskopmikrometern zur Ermittelung des Abstandes der Endpunkte benachbarter Messstangen kommen regelmässige Fehler der Art wie bei Anwendung von Kette und Stäben im Allgemeinen nicht mehr vor.

Hiernach muss man wenigstens für's Messen mit Kette und Stäben die Messungsfehler als zusammengesetzt aus zufälligen und regelmässig in gleichem Sinne einwirkenden betrachten. Nimmt man an, dass erstere vorherrschen, so wird $\mu_L = \mu\sqrt{\frac{L}{l}}$, also proportional der Quadratwurzel der zu messenden Länge; nimmt man aber die letzteren als vorherrschend an, und ist μ' der mittlere Werth der ε in diesem Falle, so wird näherungsweise $\mu_L = \mu' n = \mu' \frac{L}{l}$, also proportional der Länge selbst.

Damit ergiebt sich die Regel, möglichst auf Verminderung der Fehlerursachen zu wirken, welche grössere Fehler in immer gleichem Sinne erzeugen und man kann in der That in günstigem Terrain und bei gehöriger Vorsicht selbst mit der Kette grössere Längen weit genauer ermitteln, als dies nach den gewöhnlichen Erfahrungen möglich zu sein scheint.

Beispiel 5. Vergleichung zweier verschiedener Verfahren zur Ermittelung des Unterschieds zweier nahezu gleichen Gewichtstücke A und B auf einer gleicharmigen Waage mit anhängenden Schalen.

1. Verfahren (nach Borda). Man bringt in die eine Waagschale ein Hülfsgewichtstück von der Grösse der zu vergleichenden Gewichte und in die andere nach einander $A\,B\,B\,A$. Sehen wir nun vom Einflusse der Luft ab (oder denken ihn in Rechnung gezogen) und ist T das Gewicht des Hülfsstückes, so hat man entsprechend den 4 Wägungen,

die in nahezu gleichen Zeitintervallen aufeinander folgen werden:

$$(1)\qquad \begin{aligned} T &= A + a_1 + c \quad . \quad + \varepsilon_1 \\ T &= B + b_1 + c + \omega + \varepsilon_2 \\ T &= B + b_2 + c + 2\omega + \varepsilon_3 \\ T &= A + a_2 + c + 3\omega + \varepsilon_4 . \end{aligned}$$

Hierin bedeuten $a_1\ b_1\ b_2\ a_2$ die Zulagen, um den Zeigerarm der Waage auf einen und denselben Punkt zum Einspielen zu bringen,

c eine Constante zur Reduction auf den wahren Spielpunkt,

ω den Einfluss der der Zeit proportionalen Aenderung der Länge der Waagbalken in Folge sich ändernder Temperatur u. s. w. auf die scheinbare Grösse der Gewichtstücke,

$\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3\ \varepsilon_4$ die Wägungsfehler, welche wir in der Regel als zufälliger Natur werden betrachten dürfen.

Aus (1) folgt durch Elimination von c aus den beiden ersten und den beiden letzten:

$$\begin{aligned} A - B &= b_1 - a_1 + \omega + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \\ A - B &= b_2 - a_2 - \omega + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 \end{aligned}$$

und daraus behufs Elimination von ω durch Addition nach leichter Reduction:

$$(2)\qquad A - B = \frac{(b_1 + b_2) - (a_1 + a_2)}{2} + \frac{(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) - (\varepsilon_1 + \varepsilon)_4}{2} .$$

Daher ist ferner der mittlere Fehler in $(A - B)$, dieses nach Formel (2) unter Vernachlässigung der ε berechnet, gleich

$$\mu \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2}$$

oder es ist

$$(3)\qquad A - B = \frac{(b_1 + b_2) - (a_1 + a_2)}{2} \mp \mu$$

wenn μ den mittlern Beobachtungsfehler einer Gewichtsvergleichung (bei der Belastung T) bezeichnet.

2. Verfahren (nach Gauss). Anstatt das Hülfsstück T zu benutzen, legen wir in die beiden Waagschalen

1) links B, rechts A
2) „ A, „ B
3) „ A, „ B
4) „ B, „ A

und erhalten

$$(1^*)\qquad \begin{aligned} B &= A + a_1 + c \quad . \quad + \varepsilon_1 \\ A &= B + b_1 + c + \omega + \varepsilon_2 \\ A &= B + b_2 + c + 2\omega + \varepsilon_3 \\ B &= A + a_2 + c + 3\omega + \varepsilon_4 \end{aligned}$$

und damit

$$(2^*)\quad 2(A-B) = \frac{(b_1+b_2)-(a_1+a_2)}{2} + \frac{(\varepsilon_2+\varepsilon_3)-(\varepsilon_1+\varepsilon_4)}{2}.$$

Der mittlere Fehler in $2(A-B)$ ist wieder μ, in $(A-B)$ daher $\frac{\mu}{2}$; mithin wird

$$(3^*)\qquad A - B = \frac{(b_1+b_2)-(a_1+a_2)}{4} \mp \frac{\mu}{2}.$$

Wenn wir nun voraussetzen können, dass μ für beide Verfahren gleichen Werth hat, so ist hiermit erwiesen, dass das zweite derselben die doppelte Genauigkeit gegenüber dem ersten gewährt. 4 Wägungen nach dem 1. Verfahren geben erst dieselbe Genauigkeit, als 1 Wägung nach dem 2. Verfahren und der Zeitaufwand des 1. Verfahrens ist sonach erheblich grösser als der des zweiten zur Erzielung gleicher Genauigkeit.

Sind die ε nicht zufällig, aber im Durchschnitt für beide Verfahren als gleichgross zu betrachten, so zeigt die Vergleichung von (2) und (2*), dass auch in diesem Falle das 2. Verfahren das günstigere ist.

III. Wenn f mit den Beobachtungswerthen l nicht in linearer Weise zusammenhängt, so lässt sich die Berechnung des mittlern Fehlers desselben doch auf eine Formel der Gestalt (7) zurückführen. Sei

$$(10)\qquad f = f(l_1 l_2 l_3 \ldots)$$

so ist

$$F = f(l_1 + \varepsilon_1,\ l_2 + \varepsilon_2,\ l_3 + \varepsilon_3, \ldots)$$

und da die ε kleine Grössen sind, so kann man F in eine Reihe, die nach Potenzen der ε fortschreitet, auflösen,

wobei es genügt, die ersten Potenzen beizubehalten. Es findet sich

$$F = f + \frac{\partial f}{\partial l_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial l_2}\varepsilon_2 + \frac{\partial f}{\partial l_3}\varepsilon_3 + \ldots$$

und wenn wir dafür abkürzungsweise schreiben

$$F = f + \alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + \alpha_3\varepsilon_3 + \ldots$$

so wird wie früher

(11) $$\mu_f{}^2 = [\alpha^2\mu^2] \text{ d. i. } \left[\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)^2 \mu^2\right]$$

(12) $$\mu_f = \mp\sqrt{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)^2 \mu^2\right]}.$$

Hierzu ist noch zu erwähnen, dass die Producte $\frac{\partial f}{\partial l}\mu$ in ein und derselben Einheit ausgedrückt sein müssen, was unmittelbar einleuchtet.

Beispiel 6. In dem Dreieck DMO seines Dreiecksnetzes (Beisp. 2. 3.) sind nach Prof. Schwerd für folgende Stücke unabhängig von einander folgende Werthe gefunden worden:

(1)
$\sphericalangle OM$ in D 17° 41′ 17″.59 38 mal repetirt,
$\sphericalangle DO$ in M 90° 1′ 56″.79 35 „ „
Seite DM 18854.370 Meter,

woraus folgt

(2)
Seite DO 19793.53 Meter
„ MO 6014.001 „
$\sphericalangle$ in O 72° 16′ 45″.91

Der sphärische Excess E des Dreiecks ist 0″.29 und er ergiebt sich nach der schon im Beisp. 3. gegebenen Formel, wenn man setzt log Dreiecksinhalt = 7.754, womit log E in Sec. = 9.459 wird.

Die mittlern Fehler der drei gegebenen Stücke (1) seien resp. in Bogensecunden und Meter:

(3) $$\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3.$$

Dann berechnen sich die mittlern Fehler der drei berechneten Stücke (2) wie folgt:

Der Winkel in O ist gleich

4) $$O = 180^0 + E - D - M$$

er ist also eine Function von D und M, wobei wir vernachlässigen, dass E auch eine Function der beobachteten Grössen ist, indem, wie unschwer zu erkennen, kleine Aenderungen der letzteren den sphärischen Excess nur ganz unmerklich ändern. Damit wird der m. F. in O in Secunden gleich

$$\mp \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2} \tag{5}$$

und sind z. B. $\mu_1 = \mu_2 = \mp 1''$, so ist derselbe $\mp 1''.41$. Man erkennt hieraus zugleich, dass durch eine directe Messung des Winkels in O bei etwa 36maliger Repetition ein wesentlich genaueres Resultat würde erhalten worden sein.

Weiter ist

$$DO = DM \frac{\sin\left(M - \frac{E}{3}\right)}{\sin\left(O - \frac{E}{3}\right)} \tag{6}$$

wobei

$$O - \frac{E}{3} = 180 + 2\frac{E}{3} - D - M.$$

Sehen wir E wieder als constant an, so wird

$$\frac{\partial(DO)}{\partial(DM)} = \frac{\sin\left(M - \frac{E}{3}\right)}{\sin\left(O - \frac{E}{3}\right)} = \frac{DO}{DM} \tag{7}$$

$$\frac{\partial(DO)}{\partial D} = DO \cot\left(O - \frac{E}{3}\right) \tag{8}$$

$$\frac{\partial(DO)}{\partial M} = \frac{DM \cos\left(M - \frac{E}{3}\right)}{\sin\left(O - \frac{E}{3}\right)} + DO \cot\left(O - \frac{E}{3}\right) \tag{9}$$

$$= DO\left(\cot\left(M - \frac{E}{3}\right) + \cot\left(O - \frac{E}{3}\right)\right)$$

∂M und ∂D sind hierin noch in Bogenmaass zu verstehen; da jedoch μ_1 und μ_2, die mittlern Werthe von ∂M und ∂D, in Secunden angegeben sind, drücken wir auch diese Differentiale in Secunden aus und erhalten:

$$\frac{\partial(DO)}{(\partial D)''} = \frac{DO \cot\left(O - \frac{E}{3}\right)}{206265} \tag{8*}$$

$$(9^*) \qquad \frac{\partial(DO)}{(\partial M)''} = \frac{DO\left(\cot\left(M-\frac{E}{3}\right)+\cot\left(O-\frac{E}{3}\right)\right)}{206265}$$

und es wird hiermit

$$(10)\ \mu^2{}_{DO} = \left(\frac{DO}{DM}\right)^2\mu_3{}^2 + \left(\frac{DO\left(\cot\left(M-\frac{E}{3}\right)+\cot\left(O-\frac{E}{3}\right)\right)}{206265}\right)^2\mu_2{}^2 + \left(\frac{DO\cot\left(O-\frac{E}{3}\right)}{206265}\right)^2\mu_1{}^2.$$

Ebenso ergiebt sich aus

$$(11) \qquad OM = DM\frac{\sin\left(D-\frac{E}{3}\right)}{\sin\left(O-\frac{E}{3}\right)}$$

$$(12)\ \mu^2{}_{OM} = \left(\frac{OM}{DM}\right)^2\mu_3{}^2 + \left(\frac{OM\cot\left(O-\frac{E}{3}\right)}{206265}\right)^2\mu_2{}^2 + \left(\frac{OM\left(\cot\left(D-\frac{E}{3}\right)+\cot\left(O-\frac{E}{3}\right)\right)}{206265}\right)^2\mu_1{}^2.$$

In den Formeln (10) und (12) ist jedes Glied in Quadratmetern ausgedrückt, wie leicht zu sehen.

Für die gegebenen Zahlenwerthe ist

$$\cot\left(M-\frac{E}{3}\right) = 0.000 \qquad \cot\left(O-\frac{E}{3}\right) = 0.320$$

$$\cot\left(D-\frac{E}{3}\right) = 3.136$$

und damit nach einfacher Reduction und indem insbesondere $(0{,}00001\ DO)^2$ resp. $(0.00001\,OM)^2$ als Factor ausgehoben wird:

$$(13) \qquad \mu^2_{DO} = (0.198)^2\ \{(5.30\mu_3)^2 + (0.155\mu_2)^2 + (0.155\mu_1)^2\}$$

$$(14) \qquad \mu^2_{OM} = (0.060)^2\ \{(5.30\mu_3)^2 + (0.155\mu_2)^2 + (1.676\mu_1)^2\}$$

Diese Ausdrücke zeigen, dass auf DO der Winkelfehler in dem Winkel in D verhältnissmässig viel weniger Einfluss hat als auf OM. Nehmen wir μ_3 zu $\mp 0^m.1$ an, so muss $\mu_1 < {}^1/_3$ Sec. sein, damit sein Einfluss auf OM denjenigen von μ_3 nicht übersteigt.

Wir wollen noch anführen, dass die Differentialquotienten der Functionen DO und OM nach den Beobachtungsgrössen sich bequemer als oben wie folgt berechnen

lassen. Setzen wir nach (6)

$$(15)\quad DO + \Delta(DO) = (DM + \Delta(DM)) \frac{\sin\left(M - \frac{E}{3} + \Delta M\right)}{\sin\left(O - \frac{E}{3} + \Delta O\right)}$$

worin die Δ etwaige kleine Aenderungen resp. in Meter und Secunden andeuten und substituiren nach (1) die Werthe

$$DM = 18854^m.370$$

$$M - \frac{E}{3} = 90^0\ 1'\ 56''.693$$

$$O + \Delta O = 180^0\ 0'\ 0''.29 - (D + M) - \Delta D - \Delta M$$

oder

$$\Delta O = -(\Delta D + \Delta M)$$

$$O - \frac{E}{3} = 72^0\ 16'\ 45''.813$$

so giebt die Logarithmirung von (15)

$$\log(DO + \Delta(DO)) = 4.2754120 + 0.0000230\,\Delta(DM) + 9.9999999 + 0.0000000\,\Delta M - 9.9788887 + 0.000000672(\Delta D + \Delta M)$$

und daher

$$\log(DO + \Delta(DO)) = 4.2965232 + 0.0000230\,\Delta(DM) + 0.000000672(\Delta D + \Delta M).$$

Setzen wir nun

$$\log DO = 4.2965232 \quad DO = 19793.53$$

so ist

$$\log(DO + \Delta(DO)) = 4.2965232 + 0.0000220\,\Delta(DO)$$

und daher

$$0.0000220\,\Delta(DO) = 0.0000230\,\Delta(DM) + 0.000000672\,(\Delta D + \Delta M)$$

oder

$$\Delta(DO) = \tfrac{230}{220}\,\Delta(DM) + \tfrac{6.72}{220}(\Delta D + \Delta M)$$

mithin ist endlich

$$(16)\quad \begin{aligned} \frac{\partial(DO)}{\partial(DM)} &= 1.045 \\ \frac{\partial(DO)}{(\partial D)''} &= 0.03055 \\ \frac{\partial(DO)}{(\partial M)''} &= 0.03055. \end{aligned}$$

Damit ergiebt sich hinreichend übereinstimmend mit (13)

(17) $\mu_{DO}^2 = (1.045\,\mu_3)^2 + (+\,0.03055\,\mu_2)^2 + (+0.03055\,\mu_1)^2.$

In ähnlicher Weise folgt bei Berechnung von OM aus (11) mit Benutzung der logarithmischen Differenzen übereinstimmend mit (14)

(18) $\mu_{OM}^2 = (0.318\,\mu_3)^2 + (+\,0.0093\,\mu_2)^2 + (+\,0.1007\,\mu_1)^2.$

Setzen wir (zufolge einer später folgenden Fortsetzung von Beisp. 2.)

(19) $\mu_1 = \mp \frac{2''.07}{\sqrt{38}} \quad \mu_2 = \mp \frac{2''.07}{\sqrt{35}}$ und $\mu_3 = \mp\, 0^m.1$

so erhalten wir

(20) $\mu_{DO}^2 = 0.01092 + 0.00011 + 0.00010;\ \mu_{DO} = \mp 0^m.105$
$\mu_{OM}^2 = 0.001011 + 0.000011 + 0.001143;\ \mu_{OM} = \mp 0^m.047.$

IV. Mittlerer Fehler, zusammengesetzt aus mehreren Fehlerursachen. Wir gedenken noch des Falles, wo der mittlere Betrag der Einwirkung mehrerer von einander unabhängiger Fehlerursachen bekannt ist, welche bei einer Beobachtung auftreten.

Haben wir als wahren Beobachtungsfehler in l

(13) $$\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon'''$$

wo $\varepsilon'\ \varepsilon''\ \varepsilon'''$ die aus drei unterscheidbaren Fehlerursachen entstandenen Fehler sind; sind deren mittlere Werthe $\mu'\ \mu''\ \mu'''$, so wird der mittlere Werth von ε^2 gleich

(14) $$\mu^2 = \mu'^2 + \mu''^2 + \mu'''^2$$

was in derselben Weise, wie unter **II.** dieses §. im ähnlichen Falle abzuleiten ist.

Beispiel 7. Mittlerer Fehler einer Richtungsbeobachtung bei Horizontalwinkelmessungen. Zur Beobachtung eines Objects (einer Richtung) ist eine Einstellung auf dasselbe und eine Ablesung am Horizontalkreise nothwendig, daher setzt sich der Fehler zusammen aus den Fehlern im Einstellen und Ablesen, abgesehen von den Instrumentalfehlern, welche sich eliminiren lassen. Wenn bei verschiedenen Winkelmessungen immer an verschiedenen Kreisstellen abgelesen wird, so können wir voraussetzen, dass im Allgemeinen die Ablesefehler der eingangs des §.

erwähnten und zur Ableitung von Formel (14) erforderlichen Bedingung genügen, was wir auch von den Visurfehlern voraussetzen können. Ist deren mittlerer Werth μ', der mittlere Ablesefehler μ'', so wird der m. F. der Richtungsbeobachtung

$$\mu = \mp \sqrt{\mu'^2 + \mu''^2}. \tag{1}$$

Der mittlere Visurfehler μ' lässt sich noch weiter zerlegen. Der Fehler in der Einstellung des Visirmittels ist nämlich einestheils bedingt durch die Unsicherheit im Einstellen überhaupt, anderentheils durch die Unruhe der Bilder und zwar kann man setzen

$$\mu'^2 = \mu_1'^2 + u\mu_2'^2 \tag{2}$$

worin u einen mit der Unruhe der Bilder im Allgemeinen anwachsenden Factor bezeichnet.

Unter Umständen erhöht allerdings etwas Unruhe die Sicherheit des Visirens z. B. wenn ein Object von geringer Breite mit einem dasselbe deckenden Faden einzustellen ist, weil alsdann eine geringe Undulation des Bildes dessen Breite scheinbar vergrössert und von dieser nun zu beiden Seiten des Fadens etwas überragt, wodurch die Einstellungsschärfe sich vermehrt.

Der Ausdruck (1) ist für die Theorie der Winkelmessung von Wichtigkeit, da er den Einfluss aller der Fehlerquellen enthält, welche sich nicht durch gehörige Nivellirung (beziehendlich auch Centrirung) des Instruments, sowie Combination von Messungen in beiden Lagen des Fernrohrs und entgegengesetzter Reihenfolge der Objecte eliminiren lassen. Später gehen wir ausführlich darauf ein, insbesondere auf die Zergliederung von μ''.

Ein Winkel ist die Differenz zweier Richtungen, es ist daher der mittlere Winkelfehler im Quadrat gleich $2\mu^2$ und also der mittlere Fehler einer Winkelbeobachtung selbst gleich $\mu\sqrt{2}$.

Hat man 3 Objecte und misst den Winkel zwischen dem ersten und zweiten, ersten und dritten, so sind deren mittlere Fehler $\mu\sqrt{2}$; berechnet man daraus den Winkel zwischen dem zweiten und dritten Object, so folgt dessen m. F. gleich $\sqrt{(\mu\sqrt{2})^2 + (\mu\sqrt{2})^2} = 2\mu$. Beobachtet man aber die 3 Objecte nach Art der Satzbeobachtung, so hat man jeden

der drei Winkel nur mit dem m. F. $\mu/\sqrt{2}$; ausserdem ist die Mühe nur gleich 3, wenn man die der beiden ersten Winkelmessungen gleich 4 setzt. Wenn daher nicht besondere Umstände hinzutreten, so sind Satzbeobachtungen den Winkelmessungen vorzuziehen.

II. Abschnitt.

§. 7.

Ausgleichung directer Beobachtungen gleicher Genauigkeit. Berechnung des mittlern und des durchschnittlichen Fehlers einer Beobachtung und des mittlern Fehlers des Mittels.

I. Berechnung der Unbekannten und ihrer Genauigkeit. Schon in dem Beisp. 1 des §. 5. I. ist angegeben worden, dass wir über den plausibelsten Werth x der Unbekannten, für welche gleichgenaue directe Beobachtungswerthe $l_1 l_2 l_3 \ldots$ vorliegen, nicht im Zweifel sind. Wir nehmen als solchen das arithmetische Mittel, also bei n Messungen:

$$x = \frac{[l]}{n} \tag{1}$$

und die plausibelsten Beobachtungsfehler, im Sinne der Verbesserungen der beobachteten l, werden damit

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + x \\ \lambda_2 &= -l_2 + x \\ \lambda_3 &= -l_3 + x \\ \hline (n) \end{aligned} \tag{2}$$

woraus durch Addition folgt

$$[\lambda] = 0 \tag{3}$$

welche Formel eine vollständige Rechnungscontrolle für richtige Berechnung des Werthes x und der λ gewährt.

In der Annahme des arithmetischen Mittels, wie sie hier ohne Weiteres selbst ohne den Versuch einer Begründung geschehen, liegt gewiss eine Willkür, aber eingehende Untersuchungen haben gezeigt, dass ohne eine willkürliche Voraussetzung die Annahme des arithmetischen Mittels nicht

gerechtfertigt werden kann. Wir begnügen uns jetzt um so mehr damit, einfach dem praktischen Gefühle gefolgt zu sein, als später §. 12. für die Methode der kl. Qu., in welcher der Satz vom arithmetischen Mittel enthalten ist, eine Ableitung gegeben wird, welche auf einer willkürlichen Annahme fusst, die mit der obigen nichts gemein hat.

Ist der mittlere zu befürchtende Beobachtungsfehler μ bekannt, so haben wir nach §. 6. II., indem wir x als Function f ansehen, für $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ldots$ den Werth $1:n$, daher als Quadrat des mittlern Fehlers in x

$$\mu_x{}^2 = \mu^2\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \ldots (n)\right) = \frac{\mu^2}{n}$$

$$\mu_x = \frac{\mu}{\sqrt{n}} \tag{4}$$

d. h. die Genauigkeit des arithmetischen Mittels nimmt proportional der Quadratwurzel der Beobachtungsanzahl zu. Es geben z. B.

4 Beobachtungen die 2-fache Genauigkeit
9 „ „ 3- „ „

II. Berechnung des mittlern und durchschnittlichen Fehlers einer Beobachtung. Aus den Verbesserungen λ können der mittlere und durchschnittliche Beobachtungsfehler durch Schätzung berechnet werden; wir unterlassen jedoch hier die Ableitung der Formeln, da dieselben später im §. 15. resp. §. 14. für einen allgemeinern Fall entwickelt werden und geben nur das Resultat.

Der mittlere Fehler ist gleich

$$\mu = \mp\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}} \tag{5}$$

und der Durchschnittsfehler ist gleich

$$\vartheta = \mp\frac{[\text{val. abs. } \lambda]}{\sqrt{n(n-1)}}. \tag{6}$$

Die Quadratsumme der λ kann direct aus den einzelnen λ berechnet werden, oder nach der Formel

$$[\lambda\lambda] = [ll] - \frac{[l]\,[l]}{n} = [ll] - nx^2. \tag{7}$$

Berechnet man μ nicht direct sondern aus ϑ, so wird man (falls über die Form des Fehlergesetzes nichts Näheres

bekannt ist) entsprechend der Annahme III über $\varphi(\varepsilon)$ nach §. 3. Tabl. (19) setzen

(8) $$\mu = 1.25331\ \vartheta.$$

μ und ϑ beziehen sich auf die Abweichung der Beobachtungen von dem, allerdings unbekannten, wahren Werth der Unbekannten. Dagegen hat man in Bezug auf das arithmetische Mittel x

die mittlere Abweichung von dem arithm. Mittel

(5*) $$\mu_\lambda = \mp \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n}}$$

die durchschnittliche Abweichung von demselben

(6*) $$\vartheta_\lambda = \mp \frac{[\text{val. abs. } \lambda]}{n}.$$

Beispiel 1. (§. 5. pag. 29) ergab nach diesen Formeln für $n = 4$

μ direct berechnet $= \mp 0''.95$ $\quad \mu_x = \mp 0''.48$

μ berechnet aus $\vartheta = \mp 1''.03$ $\quad \mu_x = \mp 0''.52$

in genügender Uebereinstimmung; denn selbst wenn wir annehmen, dass μ aus 4 wahren Fehlern direct berechnet sei, haben wir nach §. 4. Tabl. (13) Annahme III den mittlern Fehler in μ gleich $0.707\,\mu : 2$ d. i. etwa $^1/_3$ seines Werthes und daher ist auch μ_x mit einem m. F. von $^1/_3$ seines Werthes behaftet. Ohne Zweifel ist der m. F. in μ aber noch etwas grösser, da sein Werth nur aus 4 plausiblen Fehlern geschätzt worden ist.

§. 8.

Ausgleichung directer Beobachtungen ungleicher Genauigkeit. Einführung des Begriffes Gewicht. Berechnung des durchschnittlichen und mittlern Fehlers der Gewichtseinheit sowie des mittlern Fehlers der Unbekannten aus den übrigbleibenden Fehlern einerseits; Berechnung des mittlern Fehlers der Unbekannten aus den mittlern Fehlern der einzelnen Beobachtungswerthe andrerseits.

I. Werth der Unbekannten und Begriff des Gewichtes. Wir beginnen mit einem einfachen Fall, indem wir aus Beobachtungen gleicher Genauigkeit solche ungleicher Genauigkeit construiren. Sei das System der Fehlergleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + x \\ \lambda_2 &= -l_2 + x \\ \lambda_3 &= -l_3 + x \\ \lambda_4 &= -l_4 + x \end{aligned}$$

so vereinigen wir die letzten drei Messungen zu einem Mittel l_2'

$$l_2' = \frac{l_2 + l_3 + l_4}{3}$$

und nennen dessen Verbesserung λ_2', für welche offenbar die Formel gilt:

$$\lambda_2' = \frac{\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}{3},$$

so wird das neue System Fehlergleichungen

$$(2)\qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + x \\ \lambda_2' &= -l_2' + x. \end{aligned}$$

Die erste derselben hat nun eine andere Genauigkeit, als die zweite, setzt man nämlich die der ursprünglichen Messungen gleich 1, so ist sie für die erste Gleichung 1, für die zweite $\sqrt{3}$, weil, den mittlern Fehler in l_1 gleich μ gesetzt, der m. F. in l_2' gleich $\mu_2' = \mu : \sqrt{3}$ ist.

Die Ausgleichung für (2) muss dasselbe ergeben, wie die für (1), zufolge der

$$x = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + l_4}{4}$$

ist. Dafür kann man schreiben

$$x = \frac{l_1 \times 1 + l_2' \times 3}{1 + 3}.$$

Da l_2' drei ursprüngliche Beobachtungen ersetzt, aufwiegt, so nennen wir 3 das Gewicht von l_2', während das Gewicht von l_1 nur 1 ist und haben in Worten

$$(3)\qquad x = \frac{l_1 \times \text{Gewicht} + l_2' \times \text{Gewicht}}{\text{Summe der Gewichte.}}$$

Es kann hierbei das Gewicht 3 von l_2' aufgefasst werden als Quotient $\mu^2 : \mu_2'^2$.

In ähnlicher Weise schliesst man, dass aus den Fehlergleichungen

$$
\begin{array}{lll}
\lambda_1 = -l_1 + x & \text{m. F. } \mu : \sqrt{g_1} & \text{Gewicht } g_1 \\
\lambda_2 = -l_2 + x & \text{,, } \mu : \sqrt{g_2} & \text{,, } g_2 \\
\lambda_3 = -l_3 + x & \text{,, } \mu : \sqrt{g_3} & \text{,, } g_3 \\
\hline
(n) & &
\end{array} \tag{4}
$$

deren l wir als arithmetische Mittel aus resp. $g_1\, g_2\, g_3 \ldots$ gleichgenauen Beobachtungen mit dem m. F. μ entstanden voraussetzen, folgt:

$$
x = \frac{l_1 g_1 + l_2 g_2 + l_3 g_3 \ldots (n)}{g_1 + g_2 + g_3 \ldots (n)} = \frac{[lg]}{[g]}. \tag{5}
$$

In derselben Weise können wir aber auch x berechnen, wenn nicht mehr arithmetische Mittel l, sondern die Beobachtungswerthe

$$
\begin{array}{l}
l_1 \text{ mit dem m. F. } \mu_1 \\
l_2 \text{ ,, ,, ,, } \mu_2 \\
l_3 \text{ ,, ,, ,, } \mu_3 \\
\hline
(n)
\end{array} \tag{6}
$$

gegeben sind, denn wir dürfen immer die l betrachten als arithmetische Mittel fingirter gleichgenauer Beobachtungen mit dem mittlern Fehler μ, welchen alsdann das Gewicht 1 beigelegt wird. Wir setzen

$$
\begin{array}{ll}
\text{für } l_1 \text{ Gewicht } g_1 & = \mu^2 : {\mu_1}^2 \\
\text{,, } l_2 \text{ ,, } g_2 & = \mu^2 : {\mu_2}^2 \\
\text{,, } l_3 \text{ ,, } g_3 & = \mu^2 : {\mu_3}^2 \\
\hline
(n) &
\end{array} \tag{7}
$$

und können sofort Formel (5) anwenden. Da nun die g nach ihrer ursprünglichen Bedeutung ganze Zahlen sind, so müsste μ so gewählt werden, dass auch jetzt die g wieder ganze Zahlen werden. Indessen zeigt der Ausdruck (5) sofort, dass man auch beliebige nichtganze Zahlen als Gewichte einführen kann, da es nur auf die Verhältnisse der Gewichte dabei ankommt. Führen wir nämlich für die g ihre Werthe nach (7) ein, so wird aus (5)

$$
x = \frac{l_1 \frac{\mu^2}{{\mu_1}^2} + l_2 \frac{\mu^2}{{\mu_2}^2} + l_3 \frac{\mu^2}{{\mu_3}^2} + \ldots (n)}{\frac{\mu^2}{{\mu_1}^2} + \frac{\mu^2}{{\mu_2}^2} + \frac{\mu^2}{{\mu_3}^2} + \ldots (n)}. \tag{8}
$$

und derselbe ist unabhängig von μ und kann geschrieben werden nach Elimination von μ

$$(9) \qquad x = \frac{\frac{l_1}{\mu_1^2} + \frac{l_2}{\mu_2^2} + \frac{l_3}{\mu_3^2} + \ldots (n)}{\frac{1}{\mu_1^2} + \frac{1}{\mu_2^2} + \frac{1}{\mu_3^2} + \ldots (n)}.$$

Wenn wir noch bedenken, dass $\mu_1\ \mu_2\ \mu_3 \ldots$ immer mehr oder weniger unsicher bestimmt sein werden, so wird man in der Regel durch geringe Aenderungen in $\mu_1\ \mu_2\ \mu_3 \ldots$ es dahin bringen können, dass sich die Gewichte in bequemen ganzen Zahlen darstellen lassen, welche sich nach (7) umgekehrt wie die Quadrate der (etwas abgeänderten) mittlern Fehler verhalten. Als Gewichtseinheit bezeichnet man eine fingirte Beobachtung mit dem Gewicht 1.

In vielen Fällen ist nur die relative Genauigkeit der Beobachtungen l bekannt. Alsdann hat man die Gewichte proportional den Quadraten der Zahlen zu setzen, welche im Verhältniss der relativen Genauigkeiten stehen. Denn es sind die Genauigkeiten umgekehrt proportional den mittlern Fehlern, die Gewichte aber sind umgekehrt proportional deren Quadraten, daher verhalten sich die Gewichte direct wie die Quadrate der Genauigkeiten oder umgekehrt wie die mittlern Fehlerquadrate.

II. Berechnung des durchschnittlichen und des mittlern Fehlers der Gewichtseinheit aus den λ. Wir berechnen zuerst die mittlere Abweichung von dem plausibelsten Werthe der Unbekannten, welche Abweichung wir mit μ_λ bezeichnen. Die λ der Gleichungen (4) entsprechen nun Beobachtungen mit verschiedenen Gewichten; wir können aber auf gleiche Gewichte, etwa auf die Gewichtseinheit reduciren, indem wir beachten, dass eine Beobachtung l_i von x mit dem Gewichte g_i immer aufgefasst werden kann als eine Beobachtung $l_i\sqrt{g_i}$ von $x\sqrt{g_i}$ mit dem Gewichte 1, wofür die Verbesserung $\lambda_i\sqrt{g_i}$ ist. Die plausibelsten Verbesserungen $\lambda_1\sqrt{g_1}\ \lambda_2\sqrt{g_2}\ \lambda_3\sqrt{g_3}\ldots$ beziehen sich hiernach auf gleichgenaue Beobachtungswerthe vom Gewichte 1 und es ist somit durch Quadriren und Addiren derselben und Division mit der Anzahl n derselben

$$(10) \qquad \mu_\lambda^2 = \frac{[\lambda^2 g]}{n}.$$

Dagegen hat man für die mittlere Abweichung einer Beobachtung vom Gewicht 1 von dem wahren Werthe der Unbekannten d. i. für den mittlern Fehler der Gewichtseinheit

$$\mu^2 = \frac{[\lambda^2 g]}{n-1}. \tag{11}$$

Ebenso ist

$$\vartheta_\lambda = \mp \frac{[\text{val. abs. } \lambda\sqrt{g}]}{n} \tag{12}$$

$$\vartheta = \mp \frac{[\text{val. abs. } \lambda\sqrt{g}]}{\sqrt{n(n-1)}} \tag{13}$$

für die durchschnittliche Abweichung resp. vom plausibelsten und vom wahren Werthe bei einer Beobachtung mit dem Gewichte 1.

Wir bemerken noch, dass die Formeln

$$\begin{aligned} [\lambda\lambda g] &= [llg] - x^2[g] \\ [\lambda g] &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

bestehen, welche jede für sich eine vollständige Rechnungscontrolle gewähren und im §. 14. entwickelt werden.

III. Mittlerer Fehler in x berechnet aus μ. Nach (5) ist x eine lineare Function der l und daher

$$\mu_x^2 = \left(\frac{g_1}{[g]}\right)^2 \frac{\mu^2}{g_1} + \left(\frac{g_2}{[g]}\right)^2 \frac{\mu^2}{g_2} + \left(\frac{g_3}{[g]}\right)^2 \frac{\mu^2}{g_3} + \cdots$$

und somit

$$\mu_x^2 = \mu^2 : [g]. \tag{15}$$

Es ist daher das Gewicht von x gleich der Summe der Gewichte der einzelnen Beobachtungen.

IV. Mittlerer Fehler in x berechnet aus $\mu_1\ \mu_2\ \mu_3 \ldots$. Sind die einzelnen mittlern Fehler der Beobachtungen gegeben, so kann μ_x ausser nach (15) noch wie folgt berechnet werden. Es ist nach (9)

$$\mu_x^2 = \left(\frac{N}{\mu_1^2}\right)^2 \mu_1^2 + \left(\frac{N}{\mu_2^2}\right)^2 \mu_2^2 + \left(\frac{N}{\mu_3^2}\right)^2 \mu_3^2 + \cdots.$$

worin

$$N = 1 : \left[\frac{1}{\mu^2}\right]$$

gesetzt wurde. Daraus folgt nach einfacher Reduction

(16) $$\mu_x^2 = N \quad \mu_x = \mp 1 : \sqrt{\left[\frac{1}{\mu^2}\right]}.$$

Der wesentliche Unterschied von Formel (15) und (16) liegt darin, dass (16) den Widerspruch der l gar nicht berücksichtigt, dass (15) hingegen auf die absolute Grösse von $\mu_1\ \mu_2\ \mu_3 \ldots$ keine Rücksicht, sondern solche nur auf ihre Verhältnisse nimmt.

Die beiden Werthe von μ_x werden im Allgemeinen von einander abweichen. Die Abweichung kann eine zufällige sein und wird als solche um so grösser werden können, je geringer die Anzahl der Beobachtungen ist; sie kann auch eine nothwendig herbeigeführte sein z. B. dadurch, dass bei der Ermittelung der l constante Fehler untergelaufen sind, die, verschieden für die verschiedenen l, bewirken, dass dieselben unerwartete Widersprüche zeigen.

Beispiel 1. (Fortsetzung zu §. 5. I. pag. 29 und §. 7. II. pag. 58) Die Messungen der Unbekannten wurden an zwei folgenden Tagen fortgesetzt und erhalten, das Resultat des ersten Tages mit hergesetzt,

(10)
$$\begin{aligned} x &= -0''.03 \quad 4 \text{ Messungen} \\ x &= +0''.18 \quad 4 \quad \text{„} \\ x &= -0''.07 \quad 8 \quad \text{„} \end{aligned}$$

Hiermit ergeben sich die Fehlergleichungen

(11)
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= +0.03 + x \quad \text{Gew. } g_1 = 4 \\ \lambda_2 &= -0.18 + x \quad \text{„} \quad g_2 = 4 \\ \lambda_3 &= +0.07 + x \quad \text{„} \quad g_3 = 8 \end{aligned}$$

Gewichtseinheit: eine einfache Messung. Es wird nun

(12) $$x = -\frac{0.03 \times 4 - 0.18 \times 4 + 0.07 \times 8}{4 + 4 + 8} = 0''.00$$

mit dem Gewicht 16.

Ferner ist

(13) $$\lambda_1 = +0.03 \quad \lambda_2 = -0.18 \quad \lambda_3 = +0.07$$

und damit, sowie übereinstimmend nach (14) d. §.

(14) $$[\lambda\lambda g] = 0.1724.$$

Auch erfüllen die λ die Formel für $[\lambda g]$, denn es ist

$$+0.03 \times 4 \; -0.18 \times 4 \; +0.07 \times 8 = -0.04$$

d. i. ausreichend genau gleich Null.

Endlich ist nach (15) d. §.

$$\mu_x^2 = \frac{\mu^2}{16}$$

und da der m. F. der Gewichtseinheit

$$\mu = \sqrt{\frac{0.1724}{3-1}} = \mp 0''.29 \tag{15}$$

so wird

$$\mu_x = \mp 0''.07. \tag{16}$$

Ferner wird

$$\vartheta = \mp \frac{2 \times 0{,}03 + 2 \times 0.18 + \sqrt{8} \times 0.07}{\sqrt{3(3-1)}} = \mp 0.25 \tag{17}$$

und daher $\mu = 1{,}17\,\vartheta$.

Aber die Berechnung von μ und ϑ ist der geringen Anzahl überschüssiger Messungen wegen sehr unsicher. Desshalb gehen wir auf die ursprünglichen 16 Beobachtungen zurück. Die resp. Verbesserungen derselben sind

$$\begin{array}{l} -1.27 \; +0.78 \; -0.11 \; +0.71 \; -0.03 \; -0.07 \; -0.08 \; -0.56 \\ +0.90 \; -0.20 \; -0.96 \; -0.86 \; +0.60 \; +0.90 \; +0.17 \; +0.03 \end{array} \tag{18}$$

deren Summe, wie es sein muss, nahezu Null ist. Es wird hiermit genauer als nach (15)

$$\mu = \mp \sqrt{\frac{6\,7743}{16-1}} = \mp \sqrt{0.4516} = \mp 0''.67 \tag{19}$$

$$\mu_x = \mp 0''.17$$

Ferner wird

$$\vartheta = \mp \frac{8.23}{\sqrt{16(16-1)}} = \mp 0''.53 \tag{20}$$

und daher

$$\mu = 1{,}26\,\vartheta. \tag{21}$$

§. 9.

Ausgleichung directer Beobachtungen gleicher Genauigkeit, welche Vielfache einer Unbekannten sind.

I. Berechnung der Unbekannten und ihres mittlern Fehlers. Diese Aufgabe, welche häufig vorkommt, lässt sich auf die vorhergehenden Fälle zurückführen. Seien

(1) $$l_1\ l_2\ l_3\ \ldots\ (n)$$

die n Beobachtungswerthe für die Vielfachen von X:

(2) $$a_1X,\ a_2X,\ a_3X,\ \ldots\ (n)$$

worin die a gegebene Coefficienten sind. Ist μ der mittlere Fehler in den l, so ist der mittlere Fehler in den Bestimmungen von x:

(3)
$$\begin{array}{lll} \text{für } x = \frac{l_1}{a_1} & \text{gleich} & \frac{\mu}{a_1} \\ ,, \quad x = \frac{l_2}{a_2} & ,, & \frac{\mu}{a_2} \\ ,, \quad x = \frac{l_3}{a_3} & ,, & \frac{\mu}{a_3} \\ \hline (n) & & \end{array}$$

und es erscheinen hierbei die Werthe $\frac{l}{a}$ als directe Beobachtungen ungleicher Genauigkeit für die Unbekannte X. Gehört zu μ die Gewichtseinheit, so sind die Gewichte der Bestimmungen gleich a^2 (mit den betr. Indices), somit nach Formel (5) §. 8. der plausibelste Werth der Unbekannten X:

$$x = \frac{\frac{l_1}{a_1}a_1^2 + \frac{l_2}{a_2}a_2^2 + \frac{l_3}{a_3}a_3^2 \ldots (n)}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \ldots (n)}.$$

oder kurz

(4) $$x = \frac{[la]}{[aa]}$$

und es ist ferner

(5) $$\mu_x = \mu : \sqrt{[aa]}$$

indem $[aa]$ das Gewicht in der Bestimmung von x wird.

Zur Berechnung von μ und ϑ hat man die Formeln (11) und (13) §. 8. anzuwenden und dabei für die übrigbleibenden Fehler und deren Gewichte die Gleichungen:

$$(6)\qquad \begin{aligned} \lambda_1' &= -\frac{l_1}{a_1} + x \qquad g_1 = a_1^2 \\ \lambda_2' &= -\frac{l_2}{a_2} + x \qquad g_2 = a_2^2 \\ \lambda_3' &= -\frac{l_3}{a_3} + x \qquad g_3 = a_3^2 \end{aligned}$$
$$(n)$$

Sowohl zur Berechnung von μ als ϑ werden nun die Producte $\lambda'\sqrt{g}$ gebraucht. Man hat aber

$$(7)\qquad \begin{aligned} \lambda_1'\sqrt{g_1} &= -l_1 + a_1 x \\ \lambda_2'\sqrt{g_2} &= -l_2 + a_2 x \\ \lambda_3'\sqrt{g_3} &= -l_3 + a_3 x \end{aligned}$$
$$(n)$$

es sind daher diese Producte die Beobachtungsfehler $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \ldots$ für $l_1 l_2 l_3 \ldots$ selbst. Also ist

$$(8)\qquad \begin{aligned} \mu &= \mp\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}} \\ \vartheta &= \mp\frac{[\text{val. abs. } \lambda]}{\sqrt{n(n-1)}} \end{aligned}$$

II. Controllformeln. Nicht unwichtig ist es, zu bemerken, dass die λ die Gleichung erfüllen:

$$(9)\qquad [\lambda a] = 0$$

denn multiplicirt man jede der Fehlergleichungen

$$(10)\qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + a_1 x \\ \lambda_2 &= -l_2 + a_2 x \\ \lambda_3 &= -l_3 + a_3 x \end{aligned}$$
$$(n)$$

mit ihrem a und addirt, so wird

$$(11)\qquad [\lambda a] = -[la] + [aa]x$$

also zufolge des Werthes von x in der That $[\lambda a] = 0$.

Man erhält ferner aus den Fehlergleichungen

$$(12)\qquad [\lambda\lambda] = [ll] - 2[al]x + [aa]x^2$$

d. i. mit Einführung des Werthes von x

$$(12^*)\qquad [\lambda\lambda] = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]}.$$

Diese Formel gewährt eine Controlle der ganzen Rechnung, wenn $[\lambda\lambda]$ auch direct aus den einzelnen λ gebildet wird.

Beispiel 8. Bestimmung der Constanten des Reichenbach'schen Distanzmessers auf Glas im Fernrohre des Compensationsniveaus Nr. 1146 von Breithaupt in Kassel. (Eigenthum der polytechn. Schule zu Aachen.)

Es erfolgte dieselbe dadurch, dass bei horizontaler Visiraxe für beide Striche Ablesungen an einer in bekannten Entfernungen vertical aufgestellten Nivellirlatte mit Metertheilung, durch abwechselnd weisse und schwarze ein Centimeter breite Felder, vorgenommen wurden. Man erhielt:

	Entfernung in Meter	Ablesungen in Meter		Latte stand
		oben	unten	
	126	0.200	1.469	aufrecht
		3.795	2.528	verkehrt
	120	0.303	1.513	aufr.
		3.693	2.488	verk.
	108	0.478	1.561	aufr.
		3.520	2.436	verk.
	96	0.761	1.728	aufr.
		3.235	2.271	verk.
(1)	84	0.761	1.608	aufr.
		3.235	2.391	verk.
	72	0.793	1.517	aufr.
		3.201	2.481	verk.
	60	0.7340	1.3375	aufr.
		3.2610	2.6600	verk.
	48	0.7920	1.2730	aufr.
		3.2045	2.7235	verk.
	36	0.8520	1.2125	aufr.
		3.1470	2.7870	verk.
	24	0.9100	1.1495	aufr.
		3.0885	2.8490	verk.
	12	1.0315	1.1505	aufr.
		2.9655	2.8470	verk.

Die Beobachtungsdaten bedürfen noch der Correction. 1) Die Längen sind mit Stäben gemessen, welche um $0^m,000833$ pro Meter zu kurz sind gegen ihre nominelle Länge; daher müssen alle Angaben mit $(1 - 0,000833)$ multiplicirt werden. 2) Es sind die Theilungsfehler der Latte gegen die den Längenmessungen zu Grunde liegende Einheit zu bestimmen und zu berücksichtigen.

An den Werthen des folgenden Tableaus sind diese Correctionen angebracht; von den Distanzen, welche sich auf die Entfernungen der Latte vom äussern Rande der Objectivfassung bezogen, sind ausserdem noch $0^m,216$ abgezogen, um die Distanzen vom äussern Brennpunkte des Objectivs zu erhalten.

Reducirte Entfernungen	Ablesungsdifferenz	Mittel
125.679	1.2688 1.2661	1.2674
119.684	1.2100 1.2039	1.2070
107.694	1.0829 1.0830	1.0830
95.704	0.9669 0.9637	0.9653
83.714	0.8468 0.8434	0.8451
71.724	0.7236 0.7195	0.7215
59.734	0.6033 0.6002	0.6018
47.744	0.4805 0.4805	0.4805
35.754	0.3601 0.3593	0.3597
23.764	0.2390 0.2390	0.2390
11.774	0.1187 0.1183	0.1185

Man hat aber bekanntlich für den Reichenbach'schen Distanzmesser die Formel:

(2) Distanz vom äussern Brennp. des Objectivs $= ax$

worin a die Ablesungsdifferenz, x eine Constante ist. Für diese setzen wir den Näherungswerth 99.2, an welchem eine Verbesserung ξ anzubringen sein wird:

(3) $$x = 99.2 + \xi$$

und nennen wir nun die Verbesserung des Ablesungsmittels v, die der Distanz d, so hat man z. B. aus der ersten Beobachtung

$$125.679 + d_1 = (1.2674 + v_1)\ (99.2 + \xi)$$

und daraus mit Vernachlässigung des Productes $v_1 \xi$

$$d_1 - 99.2 v_1 = + 0.047 + 1.2674 \xi.$$

Setzen wir allgemein

(4) $$\lambda = d - 99.2 v$$

so ergeben sich die Fehlergleichungen:

(5)
$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= + 0.047 + 1.2674 \xi \\
\lambda_2 &= + 0.050 + 1.2070 \xi \\
\lambda_3 &= - 0.260 + 1.0830 \xi \\
\lambda_4 &= + 0.054 + 0.9653 \xi \\
\lambda_5 &= + 0.120 + 0.8451 \xi \\
\lambda_6 &= - 0.151 + 0.7215 \xi \\
\lambda_7 &= - 0.035 + 0.6018 \xi \\
\lambda_8 &= - 0.078 + 0.4805 \xi \\
\lambda_9 &= - 0.072 + 0.3597 \xi \\
\lambda_{10} &= - 0.055 + 0.2390 \xi \\
\lambda_{11} &= - 0.019 + 0.1185 \xi
\end{aligned}$$

Wir bezeichnen ferner den mittlern Werth des zu d gehörenden wahren Fehlers mit μ_d, sowie den des zu v gehörenden wahren Fehlers mit μ_v und haben alsdann den mittlern Werth eines, λ entsprechenden, wahren Fehlers ε gleich μ, wofür

(6) $$\mu^2 = \mu_d{}^2 + (99.2)^2 \mu_v{}^2$$

μ_d hat jedenfalls auf μ einen weit geringeren Einfluss, als μ_v. Es ist z. B. für 125.679 gewiss $\mu_d \leqq 0.050$, dagegen

μ_v recht wohl gleich 0,0020 und daher $99{,}2\mu_v$ mindestens viermal so gross als μ_d.

Beachten wir somit hauptsächlich μ_v, so wird die Frage, welche relative Genauigkeit den Fehlergleichungen (5) beizulegen ist, zu beantworten sein durch Untersuchung von μ_v bezüglich seiner Veränderlichkeit mit der Entfernung. In einem spätern Abschnitte (Beisp. 24. I.) wird auf diese Untersuchung näher eingegangen werden, aus der wir für jetzt das Resultat entnehmen, dass μ_v im Allgemeinen mit der Entfernung wächst, jedoch nicht proportional derselben. Zwei Hypothesen, dass μ_v und somit μ unabhängig von der Entfernung resp. ihr proportional seien, werden den wahren Sachverhalt einschliessen.

Nach der ersten Hypothese ist den Fehlergleichungen (5) gleiche Genauigkeit beizulegen. Wir erhalten alsdann

$$\begin{aligned} \xi &= \tfrac{0.2169}{7.196} = 0.0301 \\ x &= 99.2301 \\ \mu_\xi &= \mu : \sqrt{7.196}. \end{aligned} \tag{7}$$

Es wird ferner für $[\lambda\lambda]$ aus den Einzelwerthen

$$\lambda_1 = +\,0.085$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= +\,0.086 & \lambda_7 &= -\,0.017 \\ \lambda_3 &= -\,0.228 & \lambda_8 &= -\,0.063 \\ \lambda_4 &= +\,0.083 & \lambda_9 &= -\,0.061 \\ \lambda_5 &= +\,0.145 & \lambda_{10} &= -\,0.048 \\ \lambda_6 &= -\,0.129 & \lambda_{11} &= -\,0.015 \end{aligned} \tag{8}$$

$$[\lambda\lambda] = 0.1217$$

Dagegen ist aus $[ll] = 0.1283$

$$[\lambda\lambda] = 0.1283 - \tfrac{(0.2169)^2}{7.196} = 0.1218 \tag{8*}$$

also mit genügender Uebereinstimmung.

Damit ergiebt sich

$$\begin{aligned} \mu &= \sqrt{\tfrac{0.1217}{10}} = \sqrt{0.01217} = \mp\,0.110 \\ \mu_\xi &= \mu_x = \mp\,0.0411. \end{aligned} \tag{9}$$

Nach der zweiten Hypothese sind die mittlern Fehler der Gleichungen (5) proportional den Entfernungen, also auch sehr nahe proportional den Ablesungsdifferenzen; dividiren wir aber die Gleichungen durch diese letzteren, so entstehen folgende Fehlergleichungen mit gleichen mittlern Fehlern:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1' &= +\,0.037 + \xi \\
\lambda_2' &= +\,0.042 + \xi \\
\lambda_3' &= -\,0.240 + \xi \\
\lambda_4' &= +\,0.056 + \xi \\
\lambda_5' &= +\,0.142 + \xi \\
\lambda_6' &= -\,0.209 + \xi \\
\lambda_7' &= -\,0.059 + \xi \\
\lambda_8' &= -\,0.163 + \xi \\
\lambda_9' &= -\,0.200 + \xi \\
\lambda_{10}' &= -\,0.231 + \xi \\
\lambda_{11}' &= -\,0.159 + \xi
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

Dieselben ergeben

$$
\begin{aligned}
\xi &= \tfrac{0.984}{11} = +\,0.0895 \\
x &= 99.2895 \qquad)11) \\
\mu_\xi &= \mu' : \sqrt{11}
\end{aligned}
$$

und ferner

$$
\begin{aligned}
\lambda_1' &= +\,0.127 \\
\lambda_2' &= +\,0.132 \qquad \lambda_7' = +\,0.031 \\
\lambda_3' &= -\,0.150 \qquad \lambda_8' = -\,0.073 \\
\lambda_4' &= +\,0.146 \qquad \lambda_9' = -\,0.110 \qquad (12) \\
\lambda_5' &= +\,0.232 \qquad \lambda_{10}' = -\,0.141 \\
\lambda_6' &= -\,0.119 \qquad \lambda_{11}' = -\,0.069 \\
[\lambda'] &= +\,0.668 - 0.662 \\
[\lambda'\lambda'] &= 0.1884
\end{aligned}
$$

womit sich findet:

$$
\begin{aligned}
\mu' &= \sqrt{\tfrac{0.1884}{10}} = \sqrt{0.01884} = \mp\,0.137 \qquad (13) \\
\mu_\xi &= \mu_x = \mp\,0.0414
\end{aligned}
$$

μ' ist nach (6) sehr nahe der mittlere Werth des 99,2fachen Fehlers im Mittel zweier Ablesungsdifferenzen reducirt auf die Ablesung 1 (d. i. nahezu 100 Meter Distanz). Für den m. F. einer einfachen Ablesungsdifferenz unter denselben Umständen ist also zu setzen $\mu'\sqrt{2} : 99{,}2$ d. i. $\mp$ 2,0 Millimeter.

Die Resultate beider Hypothesen stimmen für x auf 0.06 d. i. 1/1700 des Werthes von x überein. Wir setzen im Mittel

(14) $$x = 99.26$$

und haben als Endresultat für die Distanz vom Centrum des Instruments

(15) $$0.335 + 99.26\,a$$

indem der Abstand des äussern Brennpunkts von der verticalen Drehaxe 0.335 Meter ist.

Anmerkung. Die Grössen 0.216 und 0.335, welche sich auf die Lage des äussern Brennpunktes des Objectivs beziehen, wurden direct gemessen und sind nicht über 0.003 unsicher. Schreibt man die Formel des Distanzmessers analog (15) in der Form $y + ax$ und rechnet die gemessenen Distanzen in (1) um in Distanzen vom Instrumentcentrum, so kann man mit Hülfe derselben und der beobachteten a die beiden Unbekannten x und y bestimmen (§. 11.), man findet jedoch, dass die Bestimmung von y alsdann sehr unsicher wird. Obgleich dies nun auf die Brauchbarkeit der Endformel als Ganzes keinen Einfluss hat, insofern sie jedenfalls den Charakter einer Interpolationsformel behält, welche gegebene Functionswerthe genügend darstellt, so wird man doch der ersten Bestimmungsweise den Vorzug geben müssen, umsomehr, als eine directe Abmessung der Grössen 0.216 und 0.335, solange es auf einige Millimeter nicht ankommt, keine besondere Mühe erfordert.

§. 10.

Uebergang von dem Satze vom arithmetischen Mittel zur Methode der kleinsten Quadrate. Fehlergesetz, für welches das arithmetische Mittel gleichgenauer directer Beobachtungen den wahrscheinlichsten Werth giebt. Verallgemeinerung der Bedeutung der Gewichtszahlen g für heterogene Beobachtungsgrössen.

I. Uebergang zur Methode der kl. Qu. Betrachtet man das arithmetische Mittel x gleichgenauer directer Beobachtungen als wahrscheinlichsten Werth, so ergiebt sich daraus eine bestimmte Form des Fehlergesetzes.

Ist X der wahre Werth der Unbekannten, so ist die Wahrscheinlichkeit, den wahren Fehler ε bei einer Beobachtung zu begehen, gleich $\varphi(\varepsilon)$ oder $\varphi(-l+X)$, wenn l den Beobachtungswerth bedeutet. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei n unabhängigen Beobachtungen $l_1\ l_2\ l_3 \ldots$ die wahren Fehler $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \ldots$ sich ereignen, ist daher gleich

$$\varphi(\varepsilon_1)\varphi(\varepsilon_2)\varphi(\varepsilon_3)\ldots(n)$$

d. i. gleich

(1) $\varphi(-l_1+X)\ \varphi(-l_2+X)\ \varphi(-l_3+X)\ldots(n)$

denn man kann dies gerade so beurtheilen, wie die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens von n zukünftigen unabhängigen Ereignissen, welche bekanntlich gleich dem Product der Wahrscheinlichkeiten der Einzelereignisse ist. Nun handelt es sich hier nicht um zukünftige Ereignisse mehr, sondern um gegebene Ereignisse, denn die l sind bekannt. Dagegen kennen wir X nicht und sind daher genöthigt, eine Hypothese x über dessen Werth in (1) einzuführen. Diejenige Hypothese, welche dieses Product zu einem Maximum macht, empfiehlt sich dadurch, dass sie das wahrscheinlichste Fehlersystem giebt; wir werden sie daher annehmen als diejenige, welche die meiste Wahrscheinlichkeit für sich hat, den wahren Werth der Unbekannten zu geben (was die Wahrscheinlichkeitsrechnung noch strenger ausführt).

Andererseits empfiehlt sich uns als Hypothese das arithmetische Mittel; führen wir dies ein, so ergiebt sich:

(2) $\varphi(\lambda_1)\varphi(\lambda_2)\varphi(\lambda_3)\ldots(n)$ ist *ein Maximum* für

(2*) $$x = \frac{[l]}{n} \text{ oder } [\lambda] = 0.$$

Durch Differentiation folgt daraus nach vorheriger Logarithmirung zu bequemerer Rechnung

$$0 = \frac{d\log\varphi(\lambda_1)}{dx} + \frac{d\log\varphi(\lambda_2)}{dx} + \frac{d\log\varphi(\lambda_3)}{dx} + \ldots$$

oder

$$0 = \frac{d\log\varphi(\lambda_1)}{d\lambda_1}\frac{d\lambda_1}{dx} + \frac{d\log\varphi(\lambda_2)}{d\lambda_2}\frac{d\lambda_2}{dx} + \frac{d\log\varphi(\lambda_3)}{d\lambda_3}\frac{d\lambda_3}{dx} + \ldots$$

und weil allgemein $d\lambda = dx$ ist,

(3) $$0 = \frac{d\log\varphi(\lambda_1)}{d\lambda_1} + \frac{d\log\varphi(\lambda_2)}{d\lambda_2} + \frac{d\log\varphi(\lambda_3)}{d\lambda_3} + \ldots$$

Nun gilt aber die Bedingung (2*) für die λ:

(4) $$0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots$$

und die Gleichungen (3) und (4) müssen gleichzeitig bestehen, welche Werthe sich auch für die Beobachtungen ergeben. Haben wir für ein anderes System von Beobachtungswerthen, die dasselbe arithmetische Mittel x geben, die Verbesserungen $\lambda_1 + \delta_1$, $\lambda_2 + \delta_2$, $\lambda_3 + \delta_3$, ..., so folgt aus (4)

(5) $$0 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots$$

und aus (3) durch Entwicklung der einzelnen Glieder nach dem Taylor'schen Lehrsatze mit Beibehaltung nur der ersten Potenzen der δ

(6) $$0 = \delta_1 \varphi_1' + \delta_2 \varphi_2' + \delta_3 \varphi_3' + \ldots$$

worin $\varphi_1' \varphi_2' \varphi_3' \ldots$ die ersten Differentialquotienten der resp. Glieder von (3) nach $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \ldots$ bedeuten.

(6) muss für beliebige, jedoch der Bedingung (5) genügende, kleine Werthe δ, also unabhängig von denselben erfüllt werden; dies ist nur möglich für

(7) $$\varphi_1' = \varphi_2' = \varphi_3' = \ldots (n)$$

in welchem Falle die rechte Seite von Gl. (6) wegen (5) den Werth Null erhält. Aus (7) folgt aber

$$\frac{d^2 \log \varphi(\lambda_1)}{d\lambda_1^2} = \frac{d^2 \log \varphi(\lambda_2)}{d\lambda_2^2} = \frac{d^2 \log \varphi(\lambda_3)}{d\lambda_3^2} = \ldots (n)$$

Jeder dieser Differentialquotienten muss hiernach frei von dem resp. λ sein, d. h. allgemein muss sein

$$\frac{d^2 \log \varphi(\lambda)}{d\lambda^2} = k_1$$

einer Constanten, woraus folgt

$$\frac{d \log \varphi(\lambda)}{d\lambda} = k_1 \lambda + k_2.$$

Führt man dies in (3) ein, so ergiebt die Rücksicht auf (4) $k_2 = 0$ und man hat nun weiter durch Integration

$$\varphi(\lambda) = c e^{\frac{1}{2} k_1 \lambda^2}.$$

Da aber $\varphi(\lambda)$ abnimmt, wenn λ wächst, mindestens wenn es sehr gross wird, so muss $\frac{1}{2} k_1$ negativ, etwa gleich $-h^2$ sein:

(8) $$\varphi(\lambda) = c e^{-h^2 \lambda^2}.$$

Wir sind hiermit zu dem Fehlergesetz III gelangt, welches wir in §. 2. als erfahrungsmässige Form des Vor-

kommens wahrer zufälliger Fehler ε hingestellt haben. Es kann nicht befremden, dass in (8) anstatt ε λ vorkommt, weil wir ja in (1) statt des wahren Werthes X eine Hypothese x einführen mussten, wobei aber stillschweigend vorausgesetzt wurde, dass für die Fehler in Bezug auf X und x d. h. für ε und λ dasselbe Gesetz gilt. Mithin haben wir in (8) eigentlich eine Bestimmung von $\varphi(\varepsilon)$.

Das Product (2) geht nun über in

$$c^n e^{-h^2[\lambda\lambda]}$$

und da dasselbe ein Maximum ist, c und h aber constant sind, so muss

(9) $$[\lambda\lambda] \textit{ ein Minimum}$$

sein, d. h. unter der Annahme des Fehlergesetzes III giebt das arithmetische Mittel die kleinste Summe für die Quadrate der Verbesserungen der gleichgenauen Beobachtungen.

In der That hat man aus (9) durch Einsetzen von $\lambda = -l + x$ zur Bestimmung von x die Bedingung:

$$[(-l+x)^2] \textit{ ein Minimum},$$

woraus folgt, übereinstimmend mit §. 7. I:

$$(-l_1+x)+(-l_2+x)+(-l_3+x)+\ldots=0$$

$$[\lambda]=0 \quad x=\frac{[l]}{n}.$$

Sind die Beobachtungen ungleich genau, so sind c und h für die verschiedenen l verschieden; der Ausdruck (2) geht dann über in

$$(c_1 c_2 c_3 \ldots) e^{-(h_1^2\lambda_1^2+h_2^2\lambda_2^2+h_3^2\lambda_3^2+\ldots)} \textit{ ein Maximum}$$

d. h. für den wahrscheinlichsten Werth von x ist

(10) $$[h^2\lambda^2] \textit{ ein Minimum}.$$

Da sich nun die h^2 nach §. 3. (17†) durch die mittlern Fehlerquadrate μ^2 ausdrücken lassen, indem $h^2 = 1 : 2\mu^2$, so folgt aus (10)

(11) $$\left[\frac{\lambda^2}{\mu^2}\right] \textit{ ein Minimum}$$

oder endlich

(12) $$[\lambda^2 g] \textit{ ein Minimum.}$$

Dieselben Ausdrücke (10) (11) (12) erhält man, wenn nicht eine Unbekannte, sondern mehrere Unbekannte zu bestimmen sind, nur ist das Minimum alsdann in Bezug auf mehrere Variable zu bilden, wovon später ausführlicher. Wenden wir hier die Bedingung (12) auf die Ausgleichung directer Beobachtungen ungleicher Genauigkeit an, so wird sie:

$(-l_1+x)^2g_1+(-l_2+x)^2g_2+(-l_3+x)^2g_3+\ldots$ *ein Minimum*

und daher

$$[(-l_1+x)g] = [\lambda g] = 0$$

$$x = [lg] : [g]$$

wie früher §. 8. I.

Die Anwendung einer der Bedingungen (10) (11) (12) als Ausgleichungsprincip heisst Ausgleichung nach der Methode der kleinsten (Fehler-)Quadrate, warum? ist leicht zu erkennen.

Es hindert uns selbstverständlich nichts, dieses Verfahren in jedem Falle anzuwenden, selbst wenn wir genau wissen, dass das Fehlergesetz die Form III nicht hat. Dann erhalten wir zwar nicht das wahrscheinlichste Resultat mehr, aber doch wenigstens ein ausgeglichenes. In der Regel weiss man vor der Ausgleichung über die Form des Fehlergesetzes nur wenig, man könnte also auch wahrscheinlichste Resultate nicht ableiten; die Methode der kl. Qu. ist alsdann ein, wie die Erfahrung lehrt, zweckmässiges, immer prakticables Ausgleichungsprincip.

Der Satz vom arithmetischen Mittel dagegen ist nicht umfassend genug, um damit alle Fälle erledigen zu können. Man hätte ihn zwar empirisch erweitern können, indem man die Gleichungen auf voriger Seite für die Ausgleichung directer Beobachtungen nach der M. d. kl. Qu. rückwärts schrieb:

$$x = \frac{[l]}{n}, \quad [\lambda] = 0, \quad [(-l+x)] = 0$$

und erkannt hätte, dass die letztere die Bedingung des Minimums der Quadratsumme $[(-l+x)^2]$ nach x ist. Nur wäre uns dann die Beziehung auf das Fehlergesetz III entgangen.

Näherungsweise giebt auch das Fehlergesetz II, auf die λ angewendet, wahrscheinlichste Werthe; denn der Ausdruck (2) wird dafür bei gleichgenauen Beobachtungen

$$c^n\left(1-\frac{\lambda_1^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{\lambda_2^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{\lambda_3^2}{a^2}\right)\ldots \textit{ ein Maximum}$$

oder ausmultiplicirt und die Producte der λ^2 vernachlässigt,

$$c^n\left(1-\frac{[\lambda\lambda]}{a^2}\right) \textit{ ein Maximum}$$

d. i.

$$[\lambda\lambda] \textit{ ein Minimum.}$$

Da wir im Folgenden die Methode der kl. Qu. anwenden ohne Rücksicht auf ein bestimmtes Fehlergesetz, so wollen wir die Resultate derselben als plausibelste bezeichnen, vorbehältlich genauerer Definition in besonderen Fällen.

II. Verallgemeinerung der Bedeutung der Gewichtszahlen. In manchen Anwendungen der Methode der kl. Qu. kommt es vor, dass die Beobachtungen l und daher auch ihre λ in verschiedenen Maasseinheiten ausgedrückt sind und eventuell als heterogene Grössen auch nicht auf eine solche reducirt werden können. Alsdann hat man sich an die Form (11) zu wenden, in welcher nur absolute Zahlen vorkommen, da die Quotienten $\lambda^2 : \mu^2$ ohne Benennung sind. Wir können nun auch die Benennung der λ und μ ohne Fehler in (11) wegstreichen und für die absoluten Zahlen $\mu_1^2\,\mu_2^2\,\mu_3^2\ldots$ durch Vergleichung mit einer passend gewählten Zahl μ^2 andere Zahlen $g_1\,g_2\,g_3\ldots$ einführen, genau so, als sollten Gewichte berechnet werden. Wir werden dann wieder auf die Form (12) geführt und die Rechnung gestaltet sich wie früher. Nur bei der Berechnung des mittlern Fehlers der Gewichtseinheit müssen wir uns erinnern, dass in dieser Form der m. F. eine absolute Zahl, überhaupt bedeutungslos ist und erst durch Beziehung auf die verschiedenen heterogenen Beobachtungsgrössen eine Bedeutung und Benennung erhält. (Beisp. 11.)

III. Abschnitt.

§. 11.

Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen gleicher Genauigkeit nach der Methode der kleinsten Quadrate. Berechnung der Gewichte der Unbekannten.

I. Berechnung der Werthe der Unbekannten. Sind $l_1 l_2 l_3 \ldots$ die n Beobachtungswerthe der linearen Function $aX + bY + cZ \ldots$ der m Unbekannten $X\,Y\,Z \ldots$, wobei wir voraussetzen, dass zu jedem Beobachtungswerthe ein anderes System der bekannten Coefficienten $a\,b\,c \ldots$ gehöre, dann haben wir, wie wir schon früher angegeben, für die wahren Beobachtungsfehler ε die Gleichungen

$$(1)\qquad \left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -l_1 + a_1 X + b_1 Y + c_1 Z \\ \varepsilon_2 &= -l_2 + a_2 X + b_2 Y + c_2 Z \\ \varepsilon_3 &= -l_3 + a_3 X + b_3 Y + c_3 Z \\ \varepsilon_4 &= -l_4 + a_4 X + b_4 Y + c_4 Z \end{aligned}\right| \begin{matrix}(m)\\ \\ \\ \\ \hline (n)\end{matrix}$$

Da wir aber zur Kenntniss der wahren Werthe der Unbekannten $X\,Y\,Z$ nicht gelangen können, so bestimmen wir andere Werthe $x\,y\,z$, welchen Verbesserungen λ entsprechen, mit Erfüllung der Bedingung, dass die Summe der Quadrate der letzteren ein Minimum werde, also für jede andere Annahme der Unbekannten die Summe $[\lambda\lambda]$ grösser sein muss. Im Allgemeinen haben wir daher auch sofort

$$(2)\qquad [\varepsilon\varepsilon] > [\lambda\lambda]$$

d. h. die Quadratsumme der wahren Fehler ist grösser als die der plausibelsten Fehler.

Unsere Aufgabe ist jetzt folgende: $x\,y\,z \ldots$ zu bestimmen aus den Fehlergleichungen

$$(3)\qquad \left.\begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ \lambda_2 &= -l_2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ \lambda_3 &= -l_3 + a_3 x + b_3 y + c_3 z \\ \lambda_4 &= -l_4 + a_4 x + b_4 y + c_4 z \end{aligned}\right| \begin{matrix}(m)\\ \\ \\ \\ \hline (n)\end{matrix}$$

mit der Bedingung

(4) $$[\lambda\lambda] \textit{ ein Minimum.}$$

Damit die Aufgabe einen Sinn als Ausgleichungsaufgabe habe, setzen wir voraus, dass die Fehlergleichungen allein keine bestimmte Auflösung nach den Unbekannten zulassen, weil sie in überschüssiger Anzahl vorhanden sind. (Vergl. §. 5. II.)

Die Aufgabe in ihrer jetzigen Gestalt dagegen ist eine ganz bestimmte, denn substituiren wir die Werthe der λ in die Summe $[\lambda\lambda]$, so folgt: es soll die Summe

(5)
$$\left.\begin{array}{r} (-l_1 + a_1x + b_1y + c_1z \;.\; (m))^2 \\ +(-l_2 + a_2x + b_2y + c_2z \;.\; (m))^2 \\ +(-l_3 + a_3x + b_3y + c_3z \;.\; (m))^2 \\ +(-l_4 + a_4x + b_4y + c_4z \;.\; (m))^2 \\ \hline (n) \end{array}\right\} \textit{ein Minimum}$$

werden in Bezug auf die Wahl der Werthe $x\,y\,z\ldots$ Die Unbekannten erscheinen demnach als unabhängige Veränderliche in der Summe und diese nimmt ihren kleinsten Werth an, wenn die partiellen Differentialquotienten derselben nach den Veränderlichen Null werden. Damit ergeben sich soviel Gleichungen als Unbekannte zur Bestimmung derselben.

Behalten wir die λ zur Abkürzung bei — sie bedeuten offenbar von den unabhängigen Variablen $x\,y\,z$ abhängige Variable — so haben wir zunächst

$$\frac{\partial[\lambda\lambda]}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial[\lambda\lambda]}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial[\lambda\lambda]}{\partial z} = 0 \ldots (m)$$

und hieraus, indem man in $[\lambda\lambda]$ jedes Glied einzeln differenzirt:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = 2\lambda_1\frac{\partial\lambda_1}{\partial x} + 2\lambda_2\frac{\partial\lambda_2}{\partial x} + 2\lambda_3\frac{\partial\lambda_3}{\partial x} + 2\lambda_4\frac{\partial\lambda_4}{\partial x} \\ 0 = 2\lambda_1\frac{\partial\lambda_1}{\partial y} + 2\lambda_2\frac{\partial\lambda_2}{\partial y} + 2\lambda_3\frac{\partial\lambda_3}{\partial y} + 2\lambda_4\frac{\partial\lambda_4}{\partial y} \\ 0 = 2\lambda_1\frac{\partial\lambda_1}{\partial z} + 2\lambda_2\frac{\partial\lambda_2}{\partial z} + 2\lambda_3\frac{\partial\lambda_3}{\partial z} + 2\lambda_4\frac{\partial\lambda_4}{\partial z} \\ \hline (m) \end{array}\right| (n)$$

Aus den Fehlergleichungen ergeben sich ohne Mühe die partiellen Differentialquotienten der λ nach den Unbekannten. Führt man sie ein und dividirt allenthalben mit 2, so

findet sich

$$\begin{array}{l} 0 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4 \\ 0 = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4 \\ 0 = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 + \lambda_4 c_4 \\ \hline (m) \end{array} \Big| \; (n)$$

oder kurz

(6) $\quad 0 = [\lambda a] \quad 0 = [\lambda b] \quad 0 = [\lambda c] \ldots (m)$

und wenn man die Werthe der λ einsetzt:

$$\begin{array}{ll} & [aa]x + [ab]y + [ac]z \ldots (m) = [al] \\ (7) & [ab]x + [bb]y + [bc]z \ldots (m) = [bl] \\ & [ac]x + [bc]y + [cc]z \ldots (m) = [cl] \\ & \hline & (m) \end{array}$$

Diese Gleichungen nennen wir Normalgleichungen. Sie können nach einer der bekannten Auflösungsmethoden für lineare Gleichungen aufgelöst werden, womit man zur Kenntniss der Werthe $x\,y\,z \ldots$ gelangt, und setzt man sodann dieselben noch in die Fehlergleichungen ein, so ergeben sich auch die λ und die Aufgabe ist damit gelöst. In dieser Weise sind wir in Beispiel 2. (S. 31 u. f.) vorgegangen. Eine eingehendere Betrachtung wird uns aber noch manches schätzbare Resultat liefern; sie ist auch dadurch geboten, dass eine vollständige Auflösung Angaben über die Sicherheit der Bestimmung der Unbekannten enthalten muss.

II. Bedeutung der Gleichungen (6). Die erste derselben würden wir auch erhalten haben unter der Annahme, dass alle Unbekannten ausser x bekannt seien; denn die Fehlergleichungen hätten alsdann die Form der Fehlergleichungen des §. 9. angenommen und aus diesen wurde die Unbekannte so bestimmt, dass $[\lambda a] = 0$ wurde. Offenbar hätten wir in derselben Weise die zweite der Gleichungen erhalten, wenn wir als einzige Unbekannte y angesehen hätten und so fort auch jede der andern Gleichungen. Die Normalgleichungen können sonach ohne Annahme der Bedingung „$[\lambda\lambda]$ ein Minimum", direct aus dem Ausgleichungsverfahren für directe Beobachtungen ungleicher Genauigkeit gefunden werden, nur bleibt dann noch zu zeigen übrig, dass $[\lambda\lambda]$ ein Minimum wird, ohne welche Relation eine Uebertragung des Aus-

gleichungsverfahrens auf andere als vermittelnde Beobachtungen nicht ohne Weiteres geschehen kann.

III. Berechnung der Gewichte der berechneten Werthe der Unbekannten. Dazu ist es nothwendig, zu ermitteln, welchen Antheil jeder der Beobachtungswerthe l an den Unbekannten hat. Sei gefunden für $n = 4$ Beobachtungen mit $m = 3$ Unbekannten

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 + \alpha_4 l_4 \\ y &= \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \beta_3 l_3 + \beta_4 l_4 \\ z &= \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3 + \gamma_4 l_4 \end{aligned} \tag{8}$$

so wird für die mittlern Fehler in $x\ y\ z$

$$\begin{aligned} \mu_x &= \mu\sqrt{[\alpha\alpha]} \\ \mu_y &= \mu\sqrt{[\beta\beta]} \\ \mu_z &= \mu\sqrt{[\gamma\gamma]} \end{aligned} \tag{9}$$

denn die Unbekannten sind lineare Functionen der unabhängigen Beobachtungswerthe l mit dem mittlern Fehler μ.

Um die $\alpha\ \beta\ \gamma$ zu finden, betrachten wir das den Normalgleichungen verwandte System

$$\begin{aligned} [aa]A + [ab]B + [ac]C &= P \\ [ab]A + [bb]B + [bc]C &= Q \\ [ac]A + [bc]B + [cc]C &= R \end{aligned} \tag{10}$$

worin $P\ Q\ R$ beliebige unbestimmte Grössen, $A\ B\ C$ die Unbekannten vorstellen.

Wir multipliciren diese Gleichungen der Reihe nach mit m noch zu bestimmenden Grössen $Q_{1.1}\ Q_{1.2}\ Q_{1.3}$ und erhalten durch Addition

$$\left\{\begin{array}{l} ([aa]Q_{1.1} + [ab]Q_{1.2} + [ac]Q_{1.3})A \\ + ([ab]Q_{1.1} + [bb]Q_{1.2} + [bc]Q_{1.3})B \\ + ([ac]Q_{1.1} + [bc]Q_{1.2} + [cc]Q_{1.3})C \end{array}\right\} =$$
$$= PQ_{1.1} + QQ_{1.2} + RQ_{1.3}.$$

Bestimmen wir nun die m Multiplicatoren so, dass sie die m Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} [aa]Q_{1.1} + [ab]Q_{1.2} + [ac]Q_{1.3} &= 1 \\ [ab]Q_{1.1} + [bb]Q_{1.2} + [bc]Q_{1.3} &= 0 \\ [ac]Q_{1.1} + [bc]Q_{1.2} + [cc]Q_{1.3} &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

so wird

$$A = PQ_{1.1} + QQ_{1.2} + RQ_{1.3}. \tag{11*}$$

In derselben Weise lässt sich jede der Unbekannten durch m Hülfsgrössen darstellen; man erhält

$$B = PQ_{2.1} + QQ_{2.2} + RQ_{2.3} \tag{12*}$$

wobei die Hülfsgrössen aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} [aa]Q_{2.1} + [ab]Q_{2.2} + [ac]Q_{2.3} &= 0 \\ [ab]Q_{2.1} + [bb]Q_{2.2} + [bc]Q_{2.3} &= 1 \\ [ac]Q_{2.1} + [bc]Q_{2.2} + [cc]Q_{2.3} &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

hervorgehen; und ferner ist

$$C = PQ_{3.1} + QQ_{3.2} + RQ_{3.3} \tag{13*}$$

und zur Bestimmung der Hülfsgrössen:

$$\begin{aligned} [aa]Q_{3.1} + [ab]Q_{3.2} + [ac]Q_{3.3} &= 0 \\ [ab]Q_{3.1} + [bb]Q_{3.2} + [bc]Q_{3.3} &= 0 \\ [ac]Q_{3.1} + [bc]Q_{3.2} + [cc]Q_{3.3} &= 1 \end{aligned} \tag{13}$$

Die Gesammtzahl aller Hülfsgrössen würde m^2 sein; sie sind aber nicht sämmtlich von einander verschieden, sondern es ist immer

$$Q_{i.k} = Q_{k.i} \tag{14}$$

also z. B. $Q_{1.2} = Q_{2.1}$. Es genügt, wenn wir dies für die letztern beiden Grössen zeigen. Multipliciren wir die Gleichungen (11) der Reihe nach mit $Q_{2.1}$ $Q_{2.2}$ $Q_{2.3}$ und addiren, so entsteht

$$\left.\begin{aligned} &([aa]Q_{1.1} + [ab]Q_{1.2} + [ac]Q_{1.3})Q_{2.1} \\ +&([ab]Q_{1.1} + [bb]Q_{1.2} + [bc]Q_{1.3})Q_{2.2} \\ +&([ac]Q_{1.1} + [bc]Q_{1.2} + [cc]Q_{1.3})Q_{2.3} \end{aligned}\right\} = Q_{2.1}$$

oder links anders gruppirt

$$\left.\begin{aligned} &([aa]Q_{2.1} + [ab]Q_{2.2} + [ac]Q_{2.3})Q_{1.1} \\ +&([ab]Q_{2.1} + [bb]Q_{2.2} + [bc]Q_{2.3})Q_{1.2} \\ +&([ac]Q_{2.1} + [bc]Q_{2.2} + [cc]Q_{2.3})Q_{1.3} \end{aligned}\right\} = Q_{2.1}$$

und hieraus mit Rücksicht auf Gleichungssystem (12)

$$Q_{1.2} = Q_{2.1}.$$

Löst man nun bei gegebenen numerischen Werthen der Summen $[aa]$, $[ab]$, $[bb]$, ... das System

$$\begin{aligned} [aa]A + [ab]B + [ac]C &= P \\ [ab]A + [bb]B + [bc]C &= Q \\ [ac]A + [bc]B + [cc]C &= R \end{aligned} \tag{10}$$

auf, so erhält man nach (11*. 12*. 13*) die Werthe

$$\begin{aligned} Q_{1.1}P + Q_{1.2}Q + Q_{1.3}R &= A \\ Q_{2.1}P + Q_{2.2}Q + Q_{2.3}R &= B \\ Q_{3.1}P + Q_{3.2}Q + Q_{3.3}R &= C \end{aligned} \tag{15}$$

und es ist dieses Gleichungssystem dem vorhergehenden insofern ähnlich, als die Symmetrie in der Anordnung der Coefficienten $Q_{1.1}$, $Q_{1.2} = Q_{2.1}$, $Q_{2.2}$, ... derjenigen der Coefficienten $[aa]$, $[ab]$, $[bb]$, ... entspricht. Schreibt man die Coefficienten beider Systeme in folgender Weise schematisch zusammen:

$$\begin{array}{lll} [aa] & [ab] & [ac] \\ [ab] & [bb] & [bc] \\ [ac] & [bc] & [cc] \end{array} \qquad \begin{array}{lll} Q_{1.1} & Q_{1.2} & Q_{1.3} \\ Q_{2.1} & Q_{2.2} & Q_{2.3} \\ Q_{3.1} & Q_{3.2} & Q_{3.3} \end{array}$$

so geht die Axe der Symmetrie im ersten Falle durch die quadratischen Coefficienten $[aa]$ $[bb]$ $[cc]$, im zweiten Falle durch die Q mit quadratischen Indices: $Q_{1.1}$ $Q_{2.2}$ $Q_{3.3}$ und die Coefficienten der 1. 2. 3. Horizontalreihe stimmen der Reihe nach überein mit den Coefficienten der 1. 2. 3. Verticalreihe desselben Schemas.

Die Gleichungen für $A\,B\,C$ nennt man die unbestimmte Auflösung der Normalgleichungen. Sie lehrt uns kennen die sämmtlichen Hülfsgrössen Q und auch die Werthe der Unbekannten, wenn wir setzen

$$P = [al] \quad Q = [bl] \quad R = [cl].$$

Denn alsdann geht das System (10) in die Normalgleichungen über, es wird

$$A = x \quad B = y \quad C = z.$$

Man hat also

$$\begin{aligned} x &= [al]Q_{1.1} + [bl]Q_{1.2} + [cl]Q_{1.3} \\ y &= [al]Q_{2.1} + [bl]Q_{2.2} + [cl]Q_{2.3} \\ z &= [al]Q_{3.1} + [bl]Q_{3.2} + [cl]Q_{3.3} \end{aligned} \tag{16}$$

und wenn man die Summen auflöst und die Glieder mit derselben Beobachtungsgrösse zusammenzieht, für die Coefficienten der Gl. (8):

$$(17)\quad \begin{aligned} \alpha_1 &= a_1 Q_{1.1} + b_1 Q_{1.2} + c_1 Q_{1.3} \\ \alpha_2 &= a_2 Q_{1.1} + b_2 Q_{1.2} + c_2 Q_{1.3} \\ \alpha_3 &= a_3 Q_{1.1} + b_3 Q_{1.2} + c_3 Q_{1.3} \\ \alpha_4 &= a_4 Q_{1.1} + b_4 Q_{1.2} + c_4 Q_{1.3} \end{aligned}$$

ferner

$$(18)\quad \begin{aligned} \beta_1 &= a_1 Q_{2.1} + b_1 Q_{2.2} + c_1 Q_{2.3} \\ \beta_2 &= a_2 Q_{2.1} + b_2 Q_{2.2} + c_2 Q_{2.3} \\ \beta_3 &= a_3 Q_{2.1} + b_3 Q_{2.2} + c_3 Q_{2.3} \\ \beta_4 &= a_4 Q_{2.1} + b_4 Q_{2.2} + c_4 Q_{2.3} \end{aligned}$$

und weiter

$$(19)\quad \begin{aligned} \gamma_1 &= a_1 Q_{3.1} + b_1 Q_{3.2} + c_1 Q_{3.3} \\ \gamma_2 &= a_2 Q_{3.1} + b_2 Q_{3.2} + c_2 Q_{3.3} \\ \gamma_3 &= a_3 Q_{3.1} + b_3 Q_{3.2} + c_3 Q_{3.3} \\ \gamma_4 &= a_4 Q_{3.1} + b_4 Q_{3.2} + c_4 Q_{3.3} \end{aligned}$$

Multipliciren wir nun, um die für uns wichtigen Summen $[\alpha\alpha]$ $[\beta\beta]$ $[\gamma\gamma]$ zu erhalten, jede der obigen Gleichungen mit ihrer linken Seite und addiren, so entsteht

$$\begin{aligned} [\alpha\alpha] &= Q_{1.1}[a\alpha] + Q_{1.2}[b\alpha] + Q_{1.3}[c\alpha] \\ [\beta\beta] &= Q_{2.1}[a\beta] + Q_{2.2}[b\beta] + Q_{2.3}[c\beta] \\ [\gamma\gamma] &= Q_{3.1}[a\gamma] + Q_{3.2}[b\gamma] + Q_{3.3}[c\gamma] \end{aligned}$$

und es erübrigt nur noch, die Summen $[a\alpha]$ $[b\alpha]$ $[c\alpha]$ zu finden.

Multipliciren wir aber in (17) jede Gleichung mit dem in derselben vorkommenden a und addiren, so wird

$$[a\alpha] = [aa]\,Q_{1.1} + [ab]\,Q_{1.2} + [ac]\,Q_{1.3}$$

und ebenso nach Multiplication mit den respectiven b

$$[b\alpha] = [ba]\,Q_{1.1} + [bb]\,Q_{1.2} + [bc]\,Q_{1.3}$$

und ähnlich

$$[c\alpha] = [ca]\,Q_{1.1} + [cb]\,Q_{1.2} + [cc]\,Q_{1.3}.$$

Die Vergleichung mit System (11) zeigt ohne Weiteres, dass

$$(20)\qquad [a\alpha] = 1$$

ist, dagegen die andern Summen:

(20*) $$[b\alpha] = [c\alpha] = 0$$

sind.

Durch ein entsprechendes Verfahren mit den Gleichungen für β und γ erhält man mit Hülfe der Systeme (12) resp. (13)

(21) $$[b\beta] = 1$$

und für die sämmtlichen andern Summen:

(21*) $$[a\beta] = [c\beta] = 0$$

ferner

(22) $$[c\gamma] = 1$$

und für die andern Summen:

(22*) $$[a\gamma] = [b\gamma] = 0.$$

Damit gehen aber die Quadratsummen der α β γ über in

(23) $$[\alpha\alpha] = Q_{1.1} \quad [\beta\beta] = Q_{2.2} \quad [\gamma\gamma] = Q_{3.3}$$

und es wird, wenn μ den mittlern Fehler einer Beobachtung bezeichnet,

(24) $$\mu_x = \mu\sqrt{Q_{1.1}} \quad \mu_y = \mu\sqrt{Q_{2.2}} \quad \mu_z = \mu\sqrt{Q_{3.3}}.$$

Es sind daher die Hülfsgrössen Q mit quadratischen Indices die reciproken Gewichte der Unbekannten, das Gewicht einer Beobachtung 1 gesetzt.

Die Hülfsgrössen Q mit nichtquadratischen Indices stehen zu den Grössen α β γ auch in einer einfachen Beziehung, von welcher wir später Gebrauch machen werden, die daher hier entwickelt werden soll:

Multipliciren wir in (17) jede Gleichung für eines der α mit demjenigen β, welchem derselbe untere Index anhaftet, so ergiebt sich alsdann durch Addition:

$$[\alpha\beta] = [a\beta]Q_{1.1} + [b\beta]Q_{1.2} + [c\beta]Q_{1.3}.$$

Daher ist

(25) $$[\alpha\beta] = Q_{1.2}.$$

In derselben Weise findet man

(26) $$[\alpha\gamma] = Q_{1.3} \quad [\beta\gamma] = Q_{2.3}.$$

und es ist unschwer zu erkennen, nach welchem Gesetze diese Relationen gebildet sind.

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (8. 20 — 22*) hat man mittelst der (3) leicht noch die Relationen:

$$[\lambda\alpha] = 0 \quad [\lambda\beta] = 0 \quad [\lambda\gamma] = 0. \tag{27}$$

Wir erläutern das Vorhergehende durch Zahlenwerthe an einem früher begonnenen Beispiele.

Beispiel 2. Fortsetzung zu §. 5. II. Die Normalgleichungen lauteten, nur etwas umgeformt:

$$\begin{aligned} 3\xi - \eta - \zeta \quad . \quad &= -0.25 \\ -\xi + 3\eta \quad . \quad - \tau &= -0.28 \\ -\xi \quad . \quad + 3\zeta - \tau &= -0.40 \\ . \quad - \eta - \zeta + 3\tau &= +0.93 \end{aligned} \tag{13}$$

Um die Coefficientensymmetrie deutlicher zu erkennen, schreiben wir das Schema der Coefficienten her:

$$\begin{array}{cccc} +3 & -1 & -1 & . \\ -1 & +3 & . & -1 \\ -1 & . & +3 & -1 \\ . & -1 & -1 & +3 \end{array}$$

Wir lösen nun unbestimmt auf, d. h. wir lösen die Gleichungen (13) in der Form

$$\begin{aligned} 3A - B - C \quad . \quad &= P \\ -A + 3B \quad . \quad - D &= Q \\ -A \quad . \quad + 3C - D &= R \\ . \quad - B - C + 3D &= S \end{aligned} \tag{14}$$

nach $ABCD$ auf. Die erste und zweite dieser Gleichungen geben

$$8B - C - 3D = P + 3Q$$

und die erste und dritte:

$$-B + 8C - 3D = P + 3R$$

und mit diesen beiden die vierte:

$$\begin{aligned} 7B - 2C &= P + 3Q + S \\ -2B + 7C &= P + 3R + S \end{aligned}$$

und hieraus folgt

$$B = \frac{3P + 7Q + 2R + 3S}{15}$$

$$C = \frac{3P + 2Q + 7R + 3S}{15}$$

$$A = \frac{7P + 3Q + 3R + 2S}{15}$$

$$D = \frac{2P + 3Q + 3R + 7S}{15}$$

oder geordnet

$$(15)\quad \begin{aligned} \tfrac{7}{15}P + \tfrac{3}{15}Q + \tfrac{3}{15}R + \tfrac{2}{15}S &= A \\ \tfrac{3}{15}P + \tfrac{7}{15}Q + \tfrac{2}{15}R + \tfrac{3}{15}S &= B \\ \tfrac{3}{15}P + \tfrac{2}{15}Q + \tfrac{7}{15}R + \tfrac{3}{15}S &= C \\ \tfrac{2}{15}P + \tfrac{3}{15}Q + \tfrac{3}{15}R + \tfrac{7}{15}S &= D \end{aligned}$$

und die symmetrische Anordnung der Coefficienten ist hieraus deutlich ersichtlich. Vergleichen wir das Schema der Coefficienten

$$\begin{array}{cccc} +\frac{7}{15} & +\frac{3}{15} & +\frac{3}{15} & +\frac{2}{15} \\ +\frac{3}{15} & +\frac{7}{15} & +\frac{2}{15} & +\frac{3}{15} \\ +\frac{3}{15} & +\frac{2}{15} & +\frac{7}{15} & +\frac{3}{15} \\ +\frac{2}{15} & +\frac{3}{15} & +\frac{3}{15} & +\frac{7}{15} \end{array}$$

mit dem allgemeinen Schema derselben:

$$\begin{array}{cccc} Q_{1.1} & Q_{1.2} & Q_{1.3} & Q_{1.4} \\ Q_{2.1} & Q_{2.2} & Q_{2.3} & Q_{2.4} \\ Q_{3.1} & Q_{3.2} & Q_{3.3} & Q_{3.4} \\ Q_{4.1} & Q_{4.2} & Q_{4.3} & Q_{4.4} \end{array}$$

oder was dasselbe besagt, mit dem damit identischen Schema:

$$\begin{array}{cccc} [\alpha\alpha] & [\alpha\beta] & [\alpha\gamma] & [\alpha\delta] \\ [\alpha\beta] & [\beta\beta] & [\beta\gamma] & [\beta\delta] \\ [\alpha\gamma] & [\beta\gamma] & [\gamma\gamma] & [\gamma\delta] \\ [\alpha\delta] & [\beta\delta] & [\gamma\delta] & [\delta\delta] \end{array}$$

so können wir nun leicht die ganze Auflösung hinschreiben:

Die Werthe der Unbekannten wurden schon früher ermittelt, sie lassen sich jetzt ebenfalls berechnen, indem wir

$$P = -0.25 \quad Q = -0.28 \quad R = -0.40 \quad S = +0.93$$

setzen (wobei wir die zufällige Relation zur Erleichterung der Rechnung benutzen können, dass die Summe dieser vier Werthe Null ist, welche Relation in der Anordnung der Vertheilung der Winkelmessungen über die fünf Objecte ihren Grund hat).

Man erhält z. B. für ξ:

$$\frac{-0.25\times 7 - 0.28\times 3 - 0.40\times 3 + 0.93\times 2}{15} = \xi$$

oder

$$\frac{-0.25\times 4 - 0.93}{15} = \xi$$

demnach

$$\xi = -0.129$$

und ebenso

$$\left.\begin{array}{l} \eta = -0.048 \quad \zeta = -0.088 \quad \tau = +0.265 \end{array}\right\} \qquad (16)$$

welche Werthe mit der frühern Auflösung übereinstimmen.

Das reciproke Gewicht jeder der vier Unbekannten ist $\frac{7}{15}$, also

(17) $$\text{Gewicht für } \xi\ \eta\ \zeta\ \tau = \frac{15}{7}$$

und

(17*) $$\text{mittlerer Fehler derselben} = \mu\sqrt{\frac{7}{15}}.$$

Wir fanden aber früher für μ^2 den Werth 0.1611, daher ist

(18) $$\mu_\xi = \mu_\eta = \mu_\zeta = \mu_\tau = \mp\sqrt{\frac{0.1611\times 7}{15}}$$

$$= \mp\sqrt{0.0752} = \mp 0''.274.$$

Wenn es ein Interesse hat, zu wissen, in welcher Weise jede der Beobachtungen auf die Berechnung der Unbekannten Einfluss gehabt, so lässt sich auch das angeben. Man hat z. B. für x oder ξ:

$$\xi = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 + \alpha_4 l_4 + \alpha_5 l_5 + \alpha_6 l_6 + \alpha_7 l_7 + \alpha_8 l_8$$

(19)
$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \quad . \quad . \quad + Q_{1.3} \quad . \quad = + \tfrac{3}{15} \\
\alpha_2 &= \quad . \quad . \quad . \quad + Q_{1.4} = + \tfrac{2}{15} \\
\alpha_3 &= \quad . \quad . \quad - Q_{1.3} + Q_{1.4} = - \tfrac{1}{15} \\
\alpha_4 &= \quad . \; - Q_{1.2} \quad . \quad + Q_{1.4} = - \tfrac{1}{15} \\
\alpha_5 &= \quad . \; + Q_{1.2} \quad . \quad . \quad = + \tfrac{3}{15} \\
\alpha_6 &= - Q_{1.1} \quad . \quad + Q_{1.3} \quad . \quad = - \tfrac{4}{15} \\
\alpha_7 &= + Q_{1.1} \quad . \quad . \quad . \quad = + \tfrac{7}{15} \\
\alpha_8 &= - Q_{1.1} + Q_{1.2} \quad . \quad . \quad = - \tfrac{4}{15}
\end{aligned}$$

und multiplicirt man jede Fehlergleichung mit ihrem entsprechenden α, so ergiebt sich:

$$[\lambda\alpha] = 0.129 + \xi$$

also $\xi = -0.129$, da $[\lambda\alpha]$ Null wird. Dieser Werth von ξ stimmt mit dem oben gefundenen überein.

Ferner hat man auch, indem man jeden numerischen Werth von λ mit seinem α multiplicirt, thatsächlich $[\lambda\alpha] = 0$, nämlich

$$\begin{aligned}
[\lambda\alpha] = \tfrac{1}{15} (&- 0.264 + 0.530 - 0.213 \\
&+ 0.477 - 0.144 - 1.204 - 0.903 + 1.716)
\end{aligned}$$

daher

(20) $$[\lambda\alpha] = - 0.0003$$

also hinreichend genau gleich Null mit Rücksicht auf unvermeidliche Unsicherheit der letzten Stelle.

§. 12.

Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen gleicher Genauigkeit nach der Bedingung, dass die mittlern Fehler der Unbekannten möglichst klein werden. Allgemeine und historische Bemerkungen.

I. Berechnung der Werthe der Unbekannten, welche kleinste mittlere Fehler geben. Wir haben im Vorhergehenden die

Beobachtungen so ausgeglichen, dass die Quadratsumme ihrer Verbesserungen ein Minimum wurde. Jetzt wollen wir die Ausgleichung noch einmal vornehmen und dabei eine andere Bedingung, nämlich die in der Ueberschrift genannte, zu Grunde legen.

Man hat zunächst wie früher das System der wahren Beobachtungsfehler ε nach den Gleichungen

$$(1)\qquad \left.\begin{array}{l} \varepsilon_1 = -l_1 + a_1 X + b_1 Y + c_1 Z \\ \varepsilon_2 = -l_2 + a_2 X + b_2 Y + c_2 Z \\ \varepsilon_3 = -l_3 + a_3 X + b_3 Y + c_3 Z \\ \varepsilon_4 = -l_4 + a_4 X + b_4 X + c_4 Z \end{array}\right| \begin{array}{l} (m) \\ \\ \\ \\ \hline (n) \end{array}$$

worin $X\ Y\ Z \ldots$ die wahren Werthe der Unbekannten sind. Wir denken uns jede dieser Gleichungen mit einem vorläufig unbekannten Coefficienten multiplicirt, sie mögen heissen $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4 \ldots .$, und Alles addirt; das giebt

$$[\alpha\varepsilon] = -[\alpha l] + [a\alpha]X + [b\alpha]Y + [c\alpha]Z \ldots$$

Wir unterwerfen nun die n Werthe α den m Gleichungen

$$(2)\qquad [a\alpha] = 1 \quad [b\alpha] = [c\alpha] = \ldots = 0$$

sodass

$$(3)\qquad X = [\alpha l] + [\alpha\varepsilon]$$

wird. Da die α nur m linearen Gleichungen unterworfen wurden, sind sie noch nicht völlig bestimmt und $n - m$ derselben immer ganz beliebig.

Setzen wir nun für X den Werth

$$(4)\qquad x = [\alpha l]$$

so begehen wir den Fehler

$$(5)\qquad X - x = [\alpha\varepsilon].$$

Unter verschiedenen Annahmen über den Werth von x ist derjenige der vorzüglichere, für welchen der Fehler $[\alpha\varepsilon]$ am kleinsten ist. Da wir nun die ε nicht kennen, so müssen wir den Werth von $[\alpha\varepsilon]$ zu schätzen suchen. Nun ist aber $[\alpha\varepsilon]$ nichts anderes als die wahre Verbesserung oder der wahre Fehler von $[\alpha l]$ und das mittlere Quadrat von $[\alpha\varepsilon]$ lässt sich daher nach §. 6. II. berechnen als mittleres Fehlerquadrat der Function

$$\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 + \alpha_4 l_4 \ldots . (n)$$

der Beobachtungswerthe l mit den mittlern Fehlern μ. Es wird der durchschnittliche Werth des Quadrates von $[\alpha\varepsilon]$ gleich

$$\mu^2[\alpha\alpha]$$

d. h. es ist der mittlere zu befürchtende Fehler in x, welches nach (4) berechnet ist, gleich

$$\mu_x = \mu\sqrt{[\alpha\alpha]}. \tag{6}$$

Ein Minimum für μ_x entsteht, wenn die α die Bedingung

$$[\alpha\alpha] \textit{ ein Minimum} \tag{7}$$

erfüllen, denn μ, der andere Factor in dem Product für μ_x in Gleichung (6) ist bei gegebenen Beobachtungen eine gegebene Grösse.

Die Analysis lehrt aber, dass die α die Bedingung (7) mit Rücksicht auf die Gleichungen (2) erfüllen, wenn man sie so wählt, dass die partiellen Differentialquotienten des Ausdruckes

$$[\alpha\alpha] - 2k_1([a\alpha] - 1) - 2k_2[b\alpha] - 2k_3[c\alpha] \ldots (m)$$

nach den n verschiedenen α einzeln gleich Null werden. Die k sind hierbei m zu bestimmende Hülfsgrössen (Lagrange'sche Multiplicatoren).

Durch Herstellung des partiellen Differentialquotienten nach α_1 erhält man aber

$$2\alpha_1 - 2k_1 a_1 - 2k_2 b_1 - 2k_3 c_1 \ldots (m) = 0$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 \ldots . (m) \\ \text{und ebenso} \quad \alpha_2 &= a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 \ldots . (m) \\ \alpha_3 &= a_3 k_1 + b_3 k_2 + c_3 k_3 \ldots . (m) \\ \alpha_4 &= a_4 k_1 + b_4 k_2 + c_4 k_3 \ldots . (m) \\ &\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ &\qquad (n) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Hierdurch werden die sämmtlichen α in den m Hülfsgrössen k ausgedrückt. Diese aber findet man, wenn man die α in die Gleichungen (2) einsetzt, wodurch sich m Gleichungen zwischen den k allein ergeben. Es wird damit

$$
\begin{array}{l}
[aa]k_1 + [ab]k_2 + [ac]k_3 \quad . \quad (m) = 1 \\
[ab]k_1 + [bb]k_2 + [bc]k_3 \quad . \quad (m) = 0 \\
\underline{[ac]k_1 + [bc]k_2 + [cc]k_3 \quad . \quad (m) = 0} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (m)
\end{array} \tag{9}
$$

woraus die k und alsdann durch Substitution ihrer Werthe in (8) auch die α bestimmt werden können.

Vergleicht man nun die Gleichungen (9) mit den Gleichungen (11) §. 11., so ist sofort ersichtlich, dass die $k_1\ k_2\ k_3 \ldots$ der Reihe nach mit $Q_{1.1}\ Q_{1.2}\ Q_{1.3} \ldots$ identisch sind und nach (8) wird damit

$$
\left.
\begin{array}{l}
\alpha_1 = a_1 Q_{1.1} + b_1 Q_{1.2} + c_1 Q_{1.3} \\
\alpha_2 = a_2 Q_{1.1} + b_2 Q_{1.2} + c_2 Q_{1.3} \\
\alpha_3 = a_3 Q_{1.1} + b_3 Q_{1.2} + c_3 Q_{1.3} \\
\underline{\alpha_4 = a_4 Q_{1.1} + b_4 Q_{1.2} + c_4 Q_{1.3}} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad (n)
\end{array}
\right| (m) \tag{10}
$$

und eine Vergleichung mit (17) §. 11. zeigt, dass die jetzt als α eingeführten Hülfsgrössen identisch sind mit denjenigen α, welche sich in §. 11. ergeben haben. Wir ersehen daraus, dass der Werth der Unbekannten x sich unter der Bedingung „μ_x ein Minimum“ völlig gleich gross mit dem Werthe von x berechnet, den die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate liefert.

Es ist unschwer zu erkennen, dass in derselben Weise für jede andere der m Unbekannten sich dasselbe beweisen lässt; ja es lässt sich sogar zeigen, dass auch für beliebige Functionen der Unbekannten der mittlere Fehler ein Kleinstes wird, wenn man die Unbekannten nach der Methode der kl. Qu. ermittelt, worauf wir nicht näher eingehen wollen.

Erwägen wir noch, dass den mittlern Fehlerquadraten die Gewichte umgekehrt proportional sind und setzen als Gewichtseinheit eine Beobachtung l, so können wir auch sagen, dass die Ausgleichung nach der Methode der kl. Qu. die grössten Gewichte ergiebt.

Zunächst gilt dies nur für vermittelnde Beobachtungen; es gilt der Satz aber darum auch allgemein, weil man jede Ausgleichungsaufgabe auf die Form vermittelnder Beobach-

tungen reduciren kann, wie uns später insbesondere bei Behandlung der Ausgleichungsaufgabe Form V. dargelegt werden wird.

II. **Bedeutung der Resultate.** Wir müssen hierzu noch Folgendes hinzufügen: Stellt sich nach vollendeter Ausgleichung nach der M. d. kl. Qu. heraus, dass das Fehlervorkommen der Form $\varphi(\varepsilon) = ce^{-h^2\varepsilon^2}$ entspricht, so haben wir also nach §. 10. die wahrscheinlichsten Unbekannten und, wie wir jetzt wissen, auch die kleinsten mittlern Fehler derselben. Entspricht aber das Fehlervorkommen dieser Form von $\varphi(\varepsilon)$ nicht, so haben wir nicht mehr die wahrscheinlichsten Unbekannten; dagegen haben wir noch immer die kleinsten mittlern Fehler in der Bestimmung derselben, so lange nur die Bedingung $\varphi(+\varepsilon) = \varphi(-\varepsilon)$ erfüllt wird, d. h. positive und negative Fehler in gleicher Grösse gleich häufig eintreten.

Ist auch letztere Bedingung nicht erfüllt, so kann man von einer Schätzung des mittlern Fehlers, wie oben zwischen den Gleichungen (5) und (6) überhaupt nicht mehr reden (vergl. §. 6. II) und die Ausgleichung, welche die Summe der Fehlerquadrate zu einem Minimum macht, giebt dann weder wahrscheinlichste Werthe noch eben kleinste mittlere Fehler der Unbekannten. Sie hat alsdann nur die Bedeutung eines einfachen und stets auf praktisch durchführbare Rechnung führenden Verfahrens, um die Beobachtungen durch kleine Verbesserung in Einklang zu bringen: die Function $ax + by + cz \ldots$ für die gegebenen Systeme der Veränderlichen $a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2 \ldots$ den beobachteten Functionswerthen möglichst eng anzuschliessen.

Wenn man ein Verfahren hätte, in jedem Falle wahrscheinlichste Werthe der Unbekannten zu finden, so wäre dies das vorzüglichste. In Ermangelung eines solchen sind wir wenigstens durch Anwendung der M. d. kl. Qu. in dem weitaus häufigsten Falle, wo die Bedingung $\varphi(+\varepsilon) = \varphi(-\varepsilon)$ erfüllt ist, in der Lage Unbekannte mit möglichst kleinen mittlern Fehlern zu finden.

III. **Historische Notiz.** Wie man vom arithmetischen Mittel, dem Ausgleichungsprincip für gleichgenaue directe Beobachtungen, zur Methode der kleinsten Fehlerquadrate

als einem allgemein anwendbaren Ausgleichungsprincip gelangen könne, hat Gauss in der Theoria motus corporum coelestium, 1809 gezeigt, nachdem er schon seit 1795 diese Methode für seine Rechnungen in Anwendung gebracht hatte. 1821 veröffentlichte er in der Theoria combinationis observationum errorum minimis obnoxiae diejenige Begründung der Methode der kl. Qu., welcher wir im vorstehenden §. gefolgt sind. Nach brieflichen Aeusserungen von Gauss gegen Schumacher gab er dieser letztern Ableitung vor der ältern entschieden den Vorzug. In der That ist die jüngere Ableitung weit allgemeiner; sie zeigt die Anwendbarkeit der M. d. kl. Qu. für jedes Fehlergesetz, welches eine gerade Function der Fehler ist und ist in ihrer Begründung nur willkürlich durch die Art der Schätzung der Genauigkeit mittelst des mittlern zu befürchtenden Fehlers. Die ältere Ableitung dagegen beschränkt sich auf eine bestimmte Form des Fehlergesetzes und beruht auch auf einer willkürlichen Annahme, nämlich der, dass das arithmetische Mittel für gleichgenaue directe Beobachtungen der plausibelste Werth sei.

Lagrange hat bereits 1770 im 5. Bande der Miscellanea Taurinensia den wahrscheinlichsten Werth einer Unbekannten aus Beobachtungen finden gelehrt, ohne jedoch dem Ausgleichungsverfahren die Gestalt zu geben, welche wir Methode d. kl. Qu. nennen. (Vergl. Encke, Berl. Jahrb. 1853.)

Die Théorie analytique des probabilités (1812) von Laplace enthält eine Ableitung der M. d. kl. Qu., welche von der 1821 von Gauss gegebenen anfangs nur in der Schätzung des Fehlers $X - x$ oder $[\alpha\varepsilon]$ Gl. (5) verschieden ist. Laplace berechnet unter Annahme eines beliebigen Fehlergesetzes $\varphi(\varepsilon)$ die Wahrscheinlichkeit, dass $X - x$ innerhalb gegebener Grenzen liege und bestimmt darnach die α so, dass diese Wahrscheinlichkeit möglichst gross werde. Unter der Voraussetzung einer ins Unendliche wachsenden Anzahl Beobachtungen stellt sich heraus, dass unabhängig von einer Annahme über das Fehlergesetz (welches nur die Bedingung $\varphi(+\varepsilon) = \varphi(-\varepsilon)$ zu erfüllen hat) das günstigste System der α mit dem von der M. d. kl. Qu. geforderten übereinstimmt.

Willkürlich ist hier die Voraussetzung sehr vieler Beobachtungen, die in der Regel nicht zutrifft.

Laplace betont noch den Umstand, dass die M. d. kl. Qu. jedenfalls den Vortheil prakticabler Endgleichungen biete; selbst in dem Falle, dass man $\varphi(\varepsilon)$ genau kennte, würde die Berechnung wahrscheinlichster Werthe meist an dem Umstande scheitern, dass die Endgleichungen zur Ermittelung jener nicht mehr linear sich ergeben und somit unprakticabel würden.

Immerhin wird Letzteres nicht stets der Fall sein: so hat Thiele in seiner Schrift Undersøgelse af Omløbsbevaegelsen i Dobbelstjerne (welche jedoch Verfasser nicht zur Hand war) gezeigt, dass der wahrscheinlichste Werth bei durch Schätzung ermittelnden Doppelsterndistanzen das geometrische Mittel ist.

Laplace betrachtet es als einen zu Gunsten der Methode der kl. Qu. sprechenden Umstand, dass nach seinen Untersuchungen dieselbe die grössten Fehler λ (absolut genommen) sehr nahe zu einem Minimum mache.

Der Name „Methode der kl. Qu." rührt von Legendre her, welcher 1806 in einem Werke über die Bestimmung von Kometenbahnen dieses Ausgleichungsverfahren empirisch ableitet und seine Vortheile bespricht.

Man hat nach dieser Zeit die M. d. kl. Qu. rasch in die Wissenschaften eingeführt, wo es darauf ankommt, aus Beobachtungsresultaten möglichst zuverlässige Endwerthe zu ermitteln. Andrerseits ist es das Bestreben zahlreicher Mathematiker gewesen, die Grundlage der M. d. kl. Qu. zu beleuchten und es giebt in der That eine grössere Anzahl Ableitungen derselben aus den verschiedensten Hypothesen.

Hierüber kann man sich ausführlich instruiren u. A. in der Inaugural-Dissertation von R. Henke (Teubner, 1868).

Ueber die Methoden, welche Laplace vor Erfindung der M. d. kl. Qu. zur Ausgleichung anwandte, vergl. man Méc. Cél. Tome II. pag. 126 sequ.

§. 13.

Weitere Entwicklung der Formeln für die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen. Reducirte Normalgleichungen. Darstellung der Unbekannten und Hülfsgrössen Q als Functionen der Coefficienten der Normalgleichungen.

I. Auflösung der Normalgleichungen nach einem von Gauss eingeführten Verfahren. Im Vorhergehenden haben wir das Nöthigste gegeben, was die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen gleicher Genauigkeit nach der Methode der kl. Qu. betrifft. Es lässt sich jedoch noch Mehreres anführen, wenn es sich darum handelt, die Mühe der Rechnung möglichst klein zu machen. In dieser Beziehung wird hauptsächlich über die Auflösung der Normalgleichungen nach den Unbekannten und der Ermittlung der Gewichte derselben zu reden sein.

Die sogenannte allgemeine Auflösung der Normalgleichungen in der Form, wie sie oben angeführt wurde, ist oftmals von Vortheil, wenn die Coefficienten runde Zahlen mit wenig Ziffern sind, wie z. B. in dem betreffenden Beispiele, sowie dann, wenn ein grösserer Theil der Coefficienten Null ist. Im Allgemeinen aber ist es bequemer in folgender Weise vorzugehen.

Seien die Normalgleichungen für 4 Unbekannte*)

$$(7)\qquad \begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z + [ad]t &= [al] \\ [ab]x + [bb]y + [bc]z + [bd]t &= [bl] \\ [ac]x + [bc]y + [cc]z + [cd]t &= [cl] \\ [ad]x + [bd]y + [cd]z + [dd]t &= [dl] \end{aligned}$$

so giebt die erste Gleichung

$$(28)\qquad x + \frac{[ab]}{[aa]}y + \frac{[ac]}{[aa]}z + \frac{[ad]}{[aa]}t = \frac{[al]}{[aa]}$$

und durch Einführung dieses Ausdrucks in die zweite Gleichung behufs Elimination von x ergiebt diese letztere:

---

*) Ausnahmsweise führen wir die Gleichungsnummern im Anschluss an §. 11. fort.

$$\left\{[bb]-\frac{[ab]\,[ab]}{[aa]}\right\}y+\left\{[bc]-\frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}\right\}z+\left\{[bd]-\frac{[ab]\,[ad]}{[aa]}\right\}t = \left\{[bl]-\frac{[ab]\,[al]}{[aa]}\right\}$$

und ähnlich geben die dritte und vierte der Gleichungen:

$$\left\{[bc]-\frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}\right\}y+\left\{[cc]-\frac{[ac]\,[ac]}{[aa]}\right\}z+\left\{[cd]-\frac{[ac]\,[ad]}{[aa]}\right\}t = \left\{[cl]-\frac{[ac]\,[al]}{[aa]}\right\}$$

$$\left\{[bd]-\frac{[ab]\,[ad]}{[aa]}\right\}y+\left\{[cd]-\frac{[ac]\,[ad]}{[aa]}\right\}z+\left\{[dd]-\frac{[ad]\,[ad]}{[aa]}\right\}t = \left\{[dl]-\frac{[ad]\,[al]}{[aa]}\right\}$$

Diese drei Gleichungen schreiben wir abkürzungsweise nach einer von Gauss eingeführten Bezeichnungsweise wie folgt:

$$\begin{aligned}
&[bb.1]\,y+[bc.1]\,z+[bd.1]\,t=[bl.1]\\
&[bc.1]\,y+[cc.1]\,z+[cd.1]\,t=[cl.1]\\
&[bd.1]\,y+[cd.1]\,z+[dd.1]\,t=[dl.1]
\end{aligned}\tag{29}$$

wobei die Coefficienten aus denen des Systems (7) sich nach den Formeln berechnen:

$$\left\{\begin{aligned}
[bb.1] &= [bb]-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]\\
[bc.1] &= [bc]-\frac{[ab]}{[aa]}[ac]\\
[bd.1] &= [bd]-\frac{[ab]}{[aa]}[ad]
\end{aligned}\right.\tag{30}$$

$$\left\{\begin{aligned}
[cc.1] &= [cc]-\frac{[ac]}{[aa]}[ac]\\
[cd.1] &= [cd]-\frac{[ac]}{[aa]}[ad]
\end{aligned}\right.\tag{31}$$

$$[dd.1]=[dd]-\frac{[ad]}{[aa]}[ad]\tag{32}$$

$$\left\{\begin{aligned}
[bl.1] &= [bl]-\frac{[al]}{[aa]}[ab]\\
[cl.1] &= [cl]-\frac{[al]}{[aa]}[ac]\\
[dl.1] &= [dl]-\frac{[al]}{[aa]}[ad]
\end{aligned}\right.\tag{33}$$

Für die Auflösung bei gegebnen numerischen Werthen bedürfen wir übrigens der Formeln (30) bis (33) nicht; wir kommen dann von selbst auf die Form (29) in der oben angegebenen Weise durch Elimination von x. Aber an den allgemeinen Formeln erkennen wir doch mancherlei:

Zunächst ist bemerkenswerth, dass System (29) sich ganz ähnlich einem Normalgleichungssysteme gestaltet, denn es herrscht in demselben dieselbe Coefficientensymmetrie, wie man am besten aus den Gleichungen erkennt, welche dem System (29) direct vorangehen, weil diese die Coefficienten der Unbekannten noch in entwickelter Form enthalten.

Ferner ist leicht zu zeigen, dass wie bei Normalgleichungen jeder Coefficient in der Diagonale eine Quadratsumme ist. Z. B. ist für $[bb.1]$ nach (30)

$$[bb.1] = [bb] - \frac{[ab]\,[ab]}{[aa]}$$

oder

$$[bb.1] = \frac{[aa]\,[bb] - [ab]\,[ab]}{[aa]}$$

und hieraus folgt für $n = 3$:

$$[bb.1] = \left(\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{\sqrt{[aa]}}\right)^2 + \left(\frac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{\sqrt{[aa]}}\right)^2 + \left(\frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{\sqrt{[aa]}}\right)^2.$$

Die Coefficienten in der Diagonale des zu (29) gehörigen Coefficientensystems sind also wie diejenigen bei Normalgleichungen als Quadratsummen immer positive Werthe.

Aus der ersten Gleichung des Systems (29) leiten wir ab:

$$y + \frac{[bc.1]}{[bb.1]}z + \frac{[bd.1]}{[bb.1]}t = \frac{[bl.1]}{[bb.1]} \tag{34}$$

und eliminirt man hiermit aus den andern beiden y, so wird

$$\begin{aligned} [cc.2]\,z + [cd.2]\,t &= [cl.2] \\ [cd.2]\,z + [dd.2]\,t &= [dl.2] \end{aligned} \tag{35}$$

wobei

$$\begin{cases} [cc.2] = [cc.1] - \dfrac{[bc.1]}{[bb.1]}\,[bc.1] \\ [cd.2] = [cd.1] - \dfrac{[bc.1]}{[bb.1]}\,[bd.1] \end{cases} \tag{36}$$

$$[dd.2] = [dd.1] - \frac{[bd.1]}{[bb.1]}\,[bd.1] \tag{37}$$

$$(38)\qquad \begin{aligned}[cl.2] &= [cl.1] - \frac{[bl.1]}{[bb.1]}[bc.1]\\ [dl.2] &= [dl.1] - \frac{[bl.1]}{[bb.1]}[bd.1].\end{aligned}$$

Ueber das Gleichungssystem (35) lassen sich im Wesentlichen dieselben Bemerkungen machen, wie über das System (29).

Wir haben weiter aus (35)

$$(39)\qquad z + \frac{[cd.2]}{[cc.2]}t = \frac{[cl.2]}{[cc.2]}$$

und damit aus der zweiten Gleichung (35) durch Elimination von z

$$(40)\qquad [dd.3]t = [dl.3]$$

wobei

$$(41)\qquad [dd.3] = [dd.2] - \frac{[cd.2]}{[cc.2]}[cd.2]$$

$$(42)\qquad [dl.3] = [dl.2] - \frac{[cl.2]}{[cc.2]}[cd.2]$$

und endlich ist aus (40)

$$(43)\qquad t = \frac{[dl.3]}{[dd.3]}.$$

Man sieht leicht den Fortgang der Rechnung für mehr als vier Unbekannte ein. z, y, x aber findet man durch successive Anwendung von (39. 34. 28).

Durch diese Auflösung erhält man zunächst nur die Unbekannten selbst:

II. Um auch deren Gewichte, oder die Grössen $Q_{1.1}Q_{2.2}Q_{3.3}Q_{4.4}$ (die reciproken Gewichte) zu erhalten, muss man die, auf den vorliegenden Fall von 4 Unbekannten angewandten Systeme (11. 12. 13) §. 11. auflösen, wozu noch ein ähnliches System für $Q_{4.1}\ Q_{4.2}\ Q_{4.3}\ Q_{4.4}$ tritt, nämlich

$$(44)\qquad \begin{aligned}[aa]Q_{4.1} + [ab]Q_{4.2} + [ac]Q_{4.3} + [ad]Q_{4.4} &= 0\\ [ab]Q_{4.1} + [bb]Q_{4.2} + [bc]Q_{4.3} + [bd]Q_{4.4} &= 0\\ [ac]Q_{4.1} + [bc]Q_{4.2} + [cc]Q_{4.3} + [cd]Q_{4.4} &= 0\\ [ad]Q_{4.1} + [bd]Q_{4.2} + [cd]Q_{4.3} + [dd]Q_{4.4} &= 1\end{aligned}$$

Offenbar wird die Auflösung dieser Systeme auf der linken Seite ganz derjenigen der Normalgleichungen identisch, nur rechts sind andere Zahlenwerthe. Man hat also nur für jedes der 4 Systeme gewissermaassen neue Werthe

für $[bl.1]$ $[cl.1]$ $[dl.1]$ $[cl.2]$ $[dl.2]$ $[dl.3]$ zu bilden. Damit geht das System (44) über in

$$[dd.3]\,Q_{4.4} = 1 \tag{45}$$

und (13) in

$$\begin{aligned} [cc.2]\,Q_{3.3} + [cd.2]\,Q_{3.4} &= 1 \\ [cd.2]\,Q_{3.3} + [dd.2]\,Q_{3.4} &= 0 \end{aligned} \tag{46}$$

und (12) in

$$\begin{aligned} [bb.1]\,Q_{2.2} + [bc.1]\,Q_{2.3} + [bd.1]\,Q_{2.4} &= 1 \\ [bc.1]\,Q_{2\,2} + [cc.1]\,Q_{2.3} + [cd.1]\,Q_{2.4} &= 0 \\ [bd.1]\,Q_{2.2} + [cd.1]\,Q_{2.3} + [dd.1]\,Q_{2.4} &= 0 \end{aligned} \tag{47}$$

und nur (11) bleibt wie früher, nämlich

$$\begin{aligned} [aa]\,Q_{1.1} + [ab]\,Q_{1.2} + [ac]\,Q_{1.3} + [ad]\,Q_{1.4} &= 1 \\ [ab]\,Q_{1.1} + [bb]\,Q_{1.2} + [bc]\,Q_{1.3} + [bd]\,Q_{1.4} &= 0 \\ [ac]\,Q_{1.1} + [bc]\,Q_{1.2} + [cc]\,Q_{1.3} + [cd]\,Q_{1.4} &= 0 \\ [ad]\,Q_{1.1} + [bd]\,Q_{1.2} + [cd]\,Q_{1.3} + [dd]\,Q_{1.4} &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Diese Gleichungssysteme nennt man die Gewichtsgleichungen für die Unbekannten; es sind insbesondere

44 oder 45 die Gewichtsgleichungen für t
13 „ 46 „ „ „ „ z
12 „ 47 „ „ „ „ y
11 „ „ „ „ x

Dieselben lassen sich mittelst der Auflösung der Normalgleichungen leicht auflösen und geben auch in der letzten Form alle verschiedenen Hülfsgrössen Q; in der ursprünglichen Form (11. 12. 13. 44) liefern sie sogar die Q mit nichtquadratischen Indices doppelt, da die Gl. (14) besteht, zufolge deren immer $Q_{i.k} = Q_{k.i}$ ist und hier sowohl $Q_{i.k}$ als $Q_{k.i}$ gefunden werden.

Besonders interessant ist, dass nach Gl. (45) $1 : Q_{4.4} = [dd.3]$ ist, welche Relation gewöhnlich so ausgedrückt wird: Löst man die Normalgleichungen nach dem Gauss'schen Verfahren auf, so ist in dem letzten Systeme, welches nur noch die letzte Unbekannte enthält (hier Gl. (40)) der Coefficient derselben ihr Gewicht.

Wir bemerken beiläufig, dass man nach und nach das Gewicht jeder Unbekannten dadurch finden kann, dass man sie durch Umformung der Normalgleichungen zur letzten Unbekannten macht. Jedoch ist dieser Weg im Allgemeinen sehr umständlich.

III. Reducirte Normalgleichungen und explicite Darstellung der Unbekannten und reciproken Gewichte als Functionen der Coefficienten derselben. Indem wir weiter gehen, stellen wir noch einmal die Gleichungen (28. 34. 39. 43) zusammen, die zur successiven Berechnung der Unbekannten dienen:

$$\begin{aligned} x + \frac{[ab]}{[aa]}y + \frac{[ac]}{[aa]}z + \frac{[ad]}{[aa]}t &= \frac{[al]}{[aa]} \\ y + \frac{[bc.1]}{[bb.1]}z + \frac{[bd.1]}{[bb.1]}t &= \frac{[bl.1]}{[bb.1]} \\ z + \frac{[cd.2]}{[cc.2]}t &= \frac{[cl.2]}{[cc.2]} \\ t &= \frac{[dl.3]}{[dd.3]} \end{aligned} \tag{48}$$

Dieses Gleichungssystem wollen wir die reducirten Normalgleichungen nennen, und dafür zur Abkürzung setzen:

$$\begin{aligned} x + \alpha_1' y + \beta_1' z + \gamma_1' t &= \chi_1 \\ y + \beta_2' z + \gamma_2' t &= \chi_2 \\ z + \gamma_3' t &= \chi_3 \\ t &= \chi_4 \end{aligned} \tag{49}$$

sodass die Bedeutung der $\alpha\,\beta\,\gamma\,\chi$ durch Vergleichung mit (48) sofort erhellt.

Die Unbekannten sind nun lineare Functionen der χ. Als solche erhält man sie dargestellt durch successive Substitution, z. B. zunächst z durch Substitution von t:

$$z = \chi_3 - \chi_4\gamma_3'$$

und damit y u. s. f. Jedoch ist dieser Weg etwas umständlich. Allgemein anwendbar ist folgender:

Um x zu finden, multipliciren wir die Gl. (49) der Reihe nach mit 1, $-\alpha_1'$, $-\alpha_2'$, $-\alpha_3'$, wobei α_2' und α_3' noch zu bestimmende Coefficienten sind, addiren und erhalten damit:

$$x = \chi_1 - \chi_2\alpha_1' - \chi_3\alpha_2' - \chi_4\alpha_3' \tag{50}$$

wenn man in der Summe die Coefficienten von z und t Null setzt; der Coefficient von y wird es so schon. Es ist also noch

$$\beta_1' - \beta_2'\alpha_1' - \alpha_2' = 0$$
$$\gamma_1' - \gamma_2'\alpha_1' - \gamma_3'\alpha_2' - \alpha_3' = 0$$

zu setzen oder man hat α_2' und α_3' so zu wählen, dass

(51) $$\alpha_2' = \beta_1' - \beta_2'\alpha_1'$$

(52) $$\alpha_3' = \gamma_1' - \gamma_2'\alpha_1' - \gamma_3'\alpha_2'$$ wird.

Um y zu finden, multipliciren wir die zweite, dritte und vierte der Gleichungen (49) mit 1, $-\beta_2'$, $-\beta_3'$, wo β_3' eine noch zu bestimmende Hülfsgrösse ist. Addirt man und setzt den Coefficienten von t gleich Null, so wird

(53) $$y = \chi_2 - \chi_3\beta_2' - \chi_4\beta_3'$$

(54) $$\beta_3' = \gamma_2' - \gamma_3'\beta_2'.$$

Endlich hat man noch

(55) $$z = \chi_3 - \chi_4\gamma_3'$$

(56) $$t = \chi_4.$$

Berechnet man also die Hülfsgrössen $\alpha_2'\ \alpha_3'\ \beta_3'$ nach (51. 52. 54), so geben die Gleichungen (50. 53. 55. 56) die 4 Unbekannten in beliebiger Reihenfolge, unabhängig von einander direct aus den χ.

Die Formeln (50) bis (56) gestatten auch den Werth einer linearen Function der Unbekannten $x\ y\ z\ t$ sofort zu berechnen, ohne erst diese letzteren selbst zu ermitteln. Dazu ist nur erforderlich die Gl. (50. 53. 55. 56) in die Function einzuführen und die Glieder mit denselben χ zusammenzuziehen. Wir unterlassen die sehr einfache Ausführung, da die Endformel ohnehin wenig praktischen Werth hat, indem sie nur da eine einfachere Rechnung giebt, wo überhaupt nur der Werth einer Function verlangt wird und diese nur einen Theil der Unbekannten enthält.

Wir können schon hier vorläufig darauf hinweisen, dass im Allgemeinen die Ermittlung der Unbekannten selbst aus System (49) einfacher ist als in der letztangegebenen Weise, denn offenbar hat man bei letzterer als Mehrarbeit die Berechnung der Hülfsgrössen. Noch ungünstiger wird das Verhältniss, wenn die Normalgleichungen viele Coefficienten von der Grösse Null enthalten. Durch geschickte Anordnung der

Reihenfolge der Unbekannten vor der Auflösung der Normalgleichungen kann man es dann dahin bringen, dass in (49) mehrere der Coefficienten $\alpha' \beta' \gamma'$ Null werden. Die Auflösung durch successive Substitution wird dann einfacher. Dagegen wird in dem Systeme der Gl. (50. 53. 55. 56) der Fall, dass ein Glied Null wird, viel seltener eintreten; denn die χ sind im Allgemeinen nicht Null und die neuberechneten Hülfsgrössen als Functionen mehrerer der ursprünglich gegebnen $\alpha' \beta' \gamma'$ voraussichtlich auch nicht.

Werden aber auch die Gewichte der Unbekannten erfordert, dann neigt sich der Vortheil zumeist auf Seite der letztangegebnen Rechnungsweise. Wir können nämlich sämmtliche Q, also auch die reciproken Gewichte, d. s. die Q mit quadratischen Indices, leicht als Functionen der sämmtlichen $\alpha' \beta' \gamma'$ darstellen und damit die vollständige Auflösung der Gewichtsgleichungssysteme vermeiden:

Vergleicht man Gl. (45) mit (40), so ergiebt sich, dass t in $Q_{4.4}$ übergeht, wenn man für $[dl.3]$ die Einheit setzt, wir haben also, wie bereits bekannt

$$Q_{4.4} = \frac{1}{[dd.3]}. \tag{57}$$

Vergleicht man (46) mit (35), so ersieht man, dass s und t resp. in $Q_{3.3}$ und $Q_{3.4}$ übergehen, wenn man

$$[cl.2] = 1 \text{ und } [dl.2] = 0$$

setzt. Mit Rücksicht auf (42) hat man daher ferner zu setzen anstatt $[dl.3]$ den Ausdruck $-\frac{[cd.2]}{[cc.2]}$.

Aus der Auflösung von (35) kann man daher die von (46) finden, wenn man die angegebenen Vertauschungen allenthalben benutzt.

Nimmt man sie zunächst in den beiden letzten Gleichungen von (48) vor, so ergiebt sich:

$$Q_{3.3} + \frac{[cd.2]}{[cc.2]} Q_{3.4} = \frac{1}{[cc.2]}$$

$$Q_{3.4} = -\frac{[cd.2]}{[cc.2]\,[dd.3]}$$

oder mit Rücksicht auf (49):

$$Q_{3.3} + \gamma_3' Q_{3.4} = \frac{1}{[cc.2]}$$

$$Q_{3.4} = \frac{-\gamma_3'}{[dd.3]}.$$

Und setzt man jetzt für χ_2 und χ_3 respective die rechten Seiten der beiden letzten Gleichungen, so wird mit Hülfe von (55) und (56)

$$(58)\quad \begin{aligned} \frac{1}{[cc.2]} + \frac{\gamma_3' \gamma_3'}{[dd.3]} &= Q_{3.3} \\ -\frac{\gamma_3'}{[dd.3]} &= Q_{3.4}. \end{aligned}$$

In derselben Weise kann man aus den Auflösungen von (29) die der Gewichtsgl. (47) finden und aus den Auflösungen von (7) die der Gewichtsgl. (11). Es ergiebt sich:

$$(59)\quad \begin{aligned} \frac{1}{[bb.1]} + \frac{\beta_2' \beta_2'}{[cc.2]} + \frac{\beta_3' \beta_3'}{[dd.3]} &= Q_{2.2} \\ -\frac{\beta_2'}{[cc.2]} + \frac{\beta_3' \gamma_3'}{[dd.3]} &= Q_{2.3} \\ -\frac{\beta_3'}{[dd.3]} &= Q_{2.4} \end{aligned}$$

$$(60)\quad \begin{aligned} \frac{1}{[aa]} + \frac{\alpha_1' \alpha_1'}{[bb.1]} + \frac{\alpha_2' \alpha_2'}{[cc.2]} + \frac{\alpha_3' \alpha_3'}{[dd.3]} &= Q_{1.1} \\ -\frac{\alpha_1'}{[bb.1]} + \frac{\alpha_2' \beta_2'}{[cc.2]} + \frac{\alpha_3' \beta_3'}{[dd.3]} &= Q_{1.2} \\ -\frac{\alpha_2'}{[cc.2]} + \frac{\alpha_3' \gamma_3'}{[dd.3]} &= Q_{1.3} \\ -\frac{\alpha_3'}{[dd.3]} &= Q_{1.4} \end{aligned}$$

Man übersieht, dass die gegebene explicite Darstellung der Q nur dann von Vortheil ist, wenn nur einige der Q, also etwa die Q mit quadratischen Indices, d. h. die reciproken Gewichte der Unbekannten gebraucht werden. Was andernfalls für die Rechnung bequem ist, wird später erörtert. Wir haben die Formeln hier gegeben auch aus dem Grunde, um sie zur Entwicklung weiterer praktisch bequemer Ausdrücke zu verwenden.

§. 14.

Rechnungscontrollen.

I. Controlle durch Summengleichungen. Um für die richtige Aufstellung der Normalgleichungen eine Rechnungscontrolle zu erhalten, bilden wir die Summe der Normalgleichungen in doppelter Weise, ein Mal durch Addition

der Normalgleichungen und alsdann direct aus den Fehlergleichungen. Setzt man nämlich für die Summe der Coefficienten jeder Fehlergleichung s, so wird also (bei drei Unbekannten)

$$(1)\qquad \begin{aligned} s_1 &= a_1 + b_1 + c_1 \\ s_2 &= a_2 + b_2 + c_2 \\ s_3 &= a_3 + b_3 + c_3 \\ s_4 &= a_4 + b_4 + c_4 \end{aligned}$$

und addirt man die Normalgleichungen (7) §. 11., so folgt durch eine einfache Reduction

$$(2)\qquad [as]x + [bs]y + [cs]z = [sl]$$

welche Gleichung sich auch direct aus den Fehlergleichungen bilden lässt, indem man deren rechte Seiten mit den resp. s multiplicirt und alsdann addirt, wodurch entsteht

$$-[sl] + [as]x + [bs]y + [cs]z$$

welcher Ausdruck durch Gleichsetzung mit Null sofort Gl. (2) ergiebt.

Die Summengleichung (2) kann nun bei der Auflösung der Normalgleichungen nach dem Gauss'schen Algorithmus mit fortgeführt und wie eine letzte dieser Gleichungen behandelt werden. Eine weitere Rechnungscontrolle besteht dann darin, dass jedes aus (7) abgeleitete Gleichungssystem als Summe die zu ihm gehörende abgeleitete Summengleichung geben muss. Man erhält u. A. durch die Auflösung bei 3 Unbekannten:

$$(3)\qquad \begin{aligned} [bb.1]y + [bc.1]z &= [bl.1] \\ [bc.1]y + [cc.1]z &= [cl.1] \\ \hline [bs.1]y + [cs.1]z &= [sl.1] \end{aligned}$$

wobei

$$(4)\qquad \begin{aligned} [bs.1] &= [bs] - \frac{[as]}{[aa]}[ab] \\ [cs.1] &= [cs] - \frac{[as]}{[aa]}[ac] \\ [sl.1] &= [sl] - \frac{[as]}{[aa]}[al]. \end{aligned}$$

Zur Controlle hat man sodann

$$[bb.1] + [bc.1] = [bs.1]$$
$$[bc.1] + [cc.1] = [cs.1]$$
$$[bl.1] + [cl.1] = [sl.1]$$

Diese Rechnungscontrolle durch Summengleichungen ist ganz vorzüglich bei Anwendung der Rechenmaschine von Thomas; bei logarithmischer Rechnung ist sie dagegen etwas erschwert.

Hat man die letzte Unbekannte gefunden, so gestatten die einzelnen Summengleichungen eine successive Controlle bei der Berechnung der übrigen, und wenn alle Summengleichungen erfüllt werden, dann kann man im Allgemeinen sicher sein, dass die Ausgleichung der Beobachtungen fehlerfrei erfolgt ist.

II. Eine summarische Controlle besteht in der doppelten Berechnung der Summe $[\lambda\lambda]$. Man kann ein Mal jedes λ mit Hülfe der Unbekannten aus der betr. Fehlergleichung ermitteln und alsdann die λ quadriren und addiren. Man kann auch ein zweites Mal $[\lambda\lambda]$ berechnen mit Hülfe der Quadratsumme der l, also mittelst $[ll]$, wie folgt.

Multipliciren wir jede der Fehlergleichungen

$$\lambda_1 = -l_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z$$
$$\lambda_2 = -l_2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z$$
u. s. f.

mit ihrem l, so wird durch Addition

$$[\lambda l] = -[ll] + [al]x + [bl]y + [cl]z$$

und wenn wir jede der Fehlergleichungen mit dem betr. λ multipliciren und addiren

$$[\lambda\lambda] = -[\lambda l] + [a\lambda]x + [b\lambda]y + [c\lambda]z$$

d. i. nach §. 11. (6)

$$[\lambda\lambda] = -[\lambda l] \tag{5}$$

daher hat man weiter

$$[\lambda\lambda] = [ll] - [al]x - [bl]y - [cl]z. \tag{6}$$

Eliminirt man hieraus den Werth von x mittelst der Gl. (28) §. 13. d. i.

$$x + \frac{[ab]}{[aa]}y + \frac{[ac]}{[aa]}z = \frac{[al]}{[aa]}$$

so wird nach leichter Reduction

$$(7) \qquad [\lambda\lambda] = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - [bl.1]y - [cl.1]z.$$

Hierin eliminirt man y mit Hülfe der Gl. (34) §. 13. d. i.

$$y + \frac{[bc.1]}{[bb.1]}z = \frac{[bl.1]}{[bb.1]}$$

und erhält ohne Mühe

$$(8) \qquad [\lambda\lambda] = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - \frac{[bl.1]^2}{[bb.1]} - [cl.2]z$$

und man erkennt jetzt, wie sich die Formel gestaltet, wenn in der Weise alle Unbekannte nach und nach eliminirt werden. Es wird z. B. für 4 Unbekannte

$$(9) \qquad [\lambda\lambda] = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - \frac{[bl.1]^2}{[bb.1]} - \frac{[cl.2]^2}{[cc.2]} - \frac{[dl.3]^2}{[dd.3]}$$

oder

$$(9^*) \quad [\lambda\lambda] = [ll] - \chi_1[al] - \chi_2[bl.1] - \chi_3[cl.2] - \chi_4[dl.3].$$

Die Controlle durch doppelte Berechnung von $[\lambda\lambda]$ ist auch summarisch für die ganze Ausgleichung, aber sie zeigt leider erst am Ende der Rechnung das Vorhandensein eines Fehlers.

Die Formeln (9. 9*) sind indessen nur brauchbar bei der schematischen Auflösung der Normalgleichungen nach §. 13.

Die zweite Berechnung der Summe $[\lambda\lambda]$ kann jedoch jedenfalls nach Formel (6) erfolgen. Die Controlle ist hier ebenso vollständig. Um dies wenigstens für einen einfachen Fall zu zeigen, nehmen wir an, x sei um Δ zu gross erhalten, dann wird nach Formel (6) erhalten anstatt $[\lambda\lambda]$ ein Werth $[\lambda\lambda]'$, der um $-[al]\Delta$ davon verschieden ist:

$$(10) \qquad [\lambda\lambda]' = [\lambda\lambda] - [al]\Delta.$$

Dagegen giebt die Substitution des fehlerhaften x in die Fehlergleichungen anstatt der richtigen Werthe, Werthe, die um $+ a\Delta$ fehlerhaft sind. Setzen wir allgemein einen der letzten

$$\lambda' = \lambda + a\Delta$$

so wird

$$[\lambda'\lambda'] = [\lambda\lambda] + [aa]\Delta^2 + 2\Delta[a\lambda]$$

oder da $[a\lambda]$ Null ist,

$$(11) \qquad [\lambda'\lambda'] = [\lambda\lambda] + [aa]\Delta^2.$$

Die rechten Seiten der Gleichungen (10) und (11) sind hiernach verschieden, sodass ein Fehler Δ erkannt werden kann. Diese Controlle würde nur dann trügerisch sein, wenn zufällig x so angenommen wäre, dass

(12) $$\Delta = -\frac{[al]}{[aa]}$$

würde.

III. Eine summarische Controlle liegt auch darin, dass die übrigbleibenden aus den Fehlergleichungen berechneten Fehler λ die Gleichungen (6) §. 11. erfüllen müssen, d. h. also es muss sein:

(13) $$[\lambda a] = 0 \quad [\lambda b] = 0 \quad [\lambda c] = 0$$

und daher auch

(14) $$[\lambda s] = 0.$$

§. 15.

Berechnung des mittlern Fehlers und des Durchschnittsfehlers der Beobachtungen aus den übrigbleibenden Fehlern bei der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen gleicher Genauigkeit. Mittlerer Fehler in dem Werthe des mittlern Fehlers μ.

I. Um den mittlern Fehler μ zu finden, müssen wir auf die wahren Fehler ε zurückgehen, denn es ist bei n Beobachtungen

(1) $$\mu^2 = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}.$$

Der Einfachheit der Rechnung halber setzen wir nur 2 Unbekannte bei 3 Beobachtungen voraus und haben alsdann die Fehlergleichungen:

(2) $$\begin{cases} \varepsilon_1 = -l_1 + a_1 X + b_1 Y \\ \varepsilon_2 = -l_2 + a_2 X + b_2 Y \\ \varepsilon_3 = -l_3 + a_3 X + b_3 Y \end{cases}$$

(3) $$\begin{cases} \lambda_1 = -l_1 + a_1 x + b_1 y \\ \lambda_2 = -l_2 + a_2 x + b_2 y \\ \lambda_3 = -l_3 + a_3 x + b_3 y \end{cases}$$

Wir multipliciren jede der Gl. (2) mit ihrer linken Seite und addiren, das giebt

(4) $$[\varepsilon\varepsilon] = -[\varepsilon l] + [a\varepsilon] X + [b\varepsilon] Y.$$

Ferner multipliciren wir jede der Gl. (3) mit dem zugehörigen ε und erhalten durch Addition

(5) $$[\lambda\varepsilon] = -[\varepsilon l] + [a\varepsilon]x + [b\varepsilon]y.$$

Endlich multipliciren wir jede der Gl. (2) mit ihrem λ und addiren, wonach

(6) $$[\lambda\varepsilon] = -[\lambda l] + [a\lambda]X + [b\lambda]Y$$

d. i. zufolge des Verschwindens von $[a\lambda]$ und $[b\lambda]$:

(7) $$[\lambda\varepsilon] = -[\lambda l]$$

und da nach §. 14. (5)

$$-[\lambda l] = [\lambda\lambda]$$

ist, so ist

(8) $$[\lambda\varepsilon] = [\lambda\lambda]$$

und hiermit giebt Gl. (5)

(9) $$[\lambda\lambda] = -[\varepsilon l] + [a\varepsilon]x + [b\varepsilon]y.$$

Endlich hat man aus (4) und (9)

(10) $$[\varepsilon\varepsilon] = [\lambda\lambda] + (X - x)[a\varepsilon] + (Y - y)[b\varepsilon].$$

Wir multipliciren ferner jede der Gl. (2) und (3) mit dem zugehörigen α und haben durch Addition

$$[\alpha\varepsilon] = -[\alpha l] + [a\alpha]X + [b\alpha]Y$$
$$[\alpha\lambda] = -[\alpha l] + [a\alpha]x + [b\alpha]y$$

und mit Rücksicht darauf, dass $[a\alpha]=1$, $[b\alpha]=0$, $[\alpha\lambda]=0$ ist, sowie durch Subtraction beider Gleichungen:

(11) $$[\alpha\varepsilon] = X - x$$

und ebenso lässt sich zeigen, dass

(12) $$[\beta\varepsilon] = Y - y.$$

In (10) eingesetzt, ergiebt sich

(13) $$[\varepsilon\varepsilon] = [\lambda\lambda] + [a\varepsilon][\alpha\varepsilon] + [b\varepsilon][\beta\varepsilon].$$

Die Producte $[a\varepsilon][\alpha\varepsilon]$, $[b\varepsilon][\beta\varepsilon]$ gestatten eine Schätzung ihres durchschnittlichen Werthes. Das Product $[a\varepsilon][\alpha\varepsilon]$ zunächst hat Glieder der Form $a_1\alpha_1\varepsilon_1^2$, $a_2\alpha_2\varepsilon_2^2$, $a_3\alpha_3\varepsilon_3^2$, und Glieder der Form $2a_1\alpha_2\varepsilon_1\varepsilon_2$, $2a_1\alpha_3\varepsilon_1\varepsilon_3$, $2a_2\alpha_3\varepsilon_2\varepsilon_3$. Der durchschnittliche Werth der letzteren ist Null, sobald $\varphi(+\varepsilon) = \varphi(-\varepsilon)$, derjenige der ersteren aber $a_1\alpha_1\mu^2, a_2\alpha_2\mu^2, a_3\alpha_3\mu^2$, daher der durchschnittliche Werth des in Rede stehenden Products gleich $\mu^2[a\alpha]$ d. i. μ^2. Das Gleiche gilt für das zweite Pro-

duct und wir haben somit

(14) $$[\varepsilon\varepsilon] = [\lambda\lambda] + 2\mu^2$$

bei 2 Unbekannten, dagegen bei m solchen

(15) $$[\varepsilon\varepsilon] = [\lambda\lambda] + m\mu^2,$$

daher nach Gl. (1)

$$n\mu^2 = [\lambda\lambda] + m\mu^2$$

oder

(16) $$\mu = \mp\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-m}}.$$

Diese Formel ist nur eine Näherungsformel, welche aber um so strenger sein muss, je grösser $n - m$, die Anzahl überschüssiger Beobachtungen, ist. Man bemerke auch, dass μ sich gerade so berechnet, als wären $n - m$ wahre Fehler mit der Quadratsumme $[\lambda\lambda]$ gegeben.

Ist die Anzahl der überschüssigen Beobachtungen gleich Null, so ist es nicht möglich, den mittlern Beobachtungsfehler aus der Ausgleichung zu berechnen. Zur Berechnung der Unbekannten müssen sodann die λ als Null angenommen werden und damit giebt die Formel für μ den Werth $\frac{0}{0}$ d. h. μ ist nicht bestimmbar auf diesem Wege.

II. Durchschnittsfehler ϑ. Mittlerer und durchschnittlicher Werth der λ. In Bezug auf die berechneten Werthe der Unbekannten sind die λ Fehlergrössen, für welche wir einen mittleren Werth und einen Durchschnittswerth nach §. 4. I. bilden können. Es wird

der Durchschnittswerth der λ

(17) $$\vartheta_\lambda = \mp\frac{[\text{val. abs. } \lambda]}{n}$$

der mittlere Werth der λ

(18) $$\mu_\lambda = \mp\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n}}.$$

Wenn wir nun voraussetzen, dass näherungsweise für die Vertheilung der λ ein Gesetz $\varphi(\lambda)$ gilt von derselben Form als $\varphi(\varepsilon)$, so wird das Verhältniss von $\mu_\lambda : \vartheta_\lambda$ näherungsweise denselben Werth als $\mu : \vartheta$ haben. Damit ist für den Durchschnittsfehler:

$$\vartheta = \frac{\mu}{\mu_\lambda}\,\vartheta_\lambda = \vartheta_\lambda \sqrt{\frac{n}{n-m}}$$

$$\vartheta = \pm \frac{[\text{val. abs. } \lambda]}{\sqrt{n\,(n-m)}} \tag{19}$$

welcher Werth für $n - m = 0$ ebenfalls in $\frac{0}{0}$ übergeht.

III. Um den mittlern Fehler in der Bestimmung des mittlern Fehlers μ zu erhalten, müssen wir wie in §. 4. verfahren. Wir wollen der Einfachheit halber nur 1 Unbekannte voraussetzen. Indem wir nun

$$\mu^2 = \frac{[\lambda\lambda]}{n-1} \tag{25}$$

setzen, begehen wir den Fehler

$$\frac{[\lambda\lambda]}{n-1} - \mu^2 \tag{26}$$

da μ^2 im Allgemeinen von dem Quotienten (25) verschieden sein wird. Wir bilden nun das Quadrat dieses Fehlers und lassen in $[\lambda\lambda]$ die wahren Fehler ε alle möglichen Werthe durchlaufen. Der durchschnittliche Werth aller dieser Quadrate ist alsdann das mittlere Fehlerquadrat in μ. Wir haben aber nach (13) aus (26) als Fehlerquadrat

$$\left(\frac{[\varepsilon\varepsilon] - [\alpha\varepsilon][\alpha\varepsilon]}{n-1} - \mu^2\right)^2 \tag{27}$$

d. i. ausgerechnet

$$\frac{A}{(n-1)^2} - \frac{2\,\mu^2 B}{n-1} + \mu^4 \tag{28}$$

worin zur Abkürzung gesetzt sind:

$$A = [\varepsilon\varepsilon]^2 - 2[\varepsilon\varepsilon][\alpha\varepsilon][\alpha\varepsilon] + [\alpha\varepsilon]^2[\alpha\varepsilon]^2$$
$$B = [\varepsilon\varepsilon] - [\alpha\varepsilon][\alpha\varepsilon].$$

Den Durchschnittswerth von (28) erhalten wir, wenn wir von jedem Gliede denselben bestimmen.

Den Durchschnittswerth von $[\varepsilon\varepsilon]^2$ oder der Summen $[\varepsilon_i{}^4] + [\varepsilon_i{}^2\,\varepsilon_h{}^2]$, $i \gtrless h$, i und h von $1 \ldots n$, ist nach den Bezeichnungen des §. 4. gleich $n\,J_4 + n\,(n-1)\,J_2{}^2$, denn $[\varepsilon_i{}^4]$ besteht aus n Summanden vom Durchschnittswerthe J_4 und $[\varepsilon_i{}^2\,\varepsilon_h{}^2]$ aus $n(n-1)$ Summanden vom Durchschnittswerthe $J_2 J_2$.

Der Durchschnittswerth von $[\varepsilon\varepsilon][\alpha\varepsilon][\alpha\varepsilon]$ d. i. $[a_i\,\alpha_i\,\varepsilon_i{}^4] + [a_i\,\alpha_i\,\varepsilon_i{}^2\,\varepsilon_h{}^2] +$ Glieder mit den 1. und 3. Potenzen von ε, ist $J_4 + (n-1)\,J_2{}^2$. Denn der Durchschnittswerth von $\varepsilon_i{}^4$

ist J_4, von $\varepsilon_i^2 \varepsilon_h^2$ ist er $J_2 J_2$, womit die beiden ersten Glieder in $[a\alpha] J_4 + [a\alpha](n-1) J_2^2$ übergehen d.i. in $J_4 + (n-1) J_2^2$. Die Glieder mit den 1. und 3. Potenzen der ε sind im Durchschnitt Null zufolge der Voraussetzung $\varphi(+\varepsilon) = \varphi(-\varepsilon)$.

Der Durchschnittswerth von $[a\varepsilon]^2 [\alpha\varepsilon]^2$ d. i. $[a_i^2 \alpha_i^2 \varepsilon_i^4] + [a_i^2 \alpha_h^2 \varepsilon_i^2 \varepsilon_h^2] + 2[a_i \alpha_i a_h \alpha_h \varepsilon_i^2 \varepsilon_h^2]$ wird hiernach zunächst gleich $[a^2\alpha^2] J_4 + [a_i^2 \alpha_h^2] J_2^2 + 2[a_i \alpha_i a_h \alpha_h] J_2^2$. Nun ist aber

$$[a_i^2 \alpha_h^2] = [-a_i^2 \alpha_i^2 + a_i^2 [\alpha^2]] = [a^2][\alpha^2] - [a^2\alpha^2] = 1 - [a^2\alpha^2]$$

indem nach §. 11. III. für 1 Unbekannte $[\alpha\alpha] = Q_{1.1} = 1 : [a a]$ wird. Ferner hat man

$$[a_i \alpha_i a_h \alpha_h] = [a_i \alpha_i [a\alpha] - a_i^2 \alpha_i^2] = [a\alpha]^2 - [a^2\alpha^2] = 1 - [a^2\alpha^2]$$

daher ist der Durchschnittswerth von $[a\varepsilon]^2 [\alpha\varepsilon^2]$ gleich

$$[a^2\alpha^2] J_4 + 3(1 - [a^2\alpha^2]) J_2^2.$$

Der Durchschnittswerth von A folgt hieraus zu

$$(n - 2 + [a^2\alpha^2]) J_4 + (n^2 - 3n + 5 - 3[a^2\alpha^2]) J_2^2$$

wobei $J_2 = \mu^2$ ist.

Der Durchschnittswerth von B ist ferner gleich (vergl. die Entwicklung von (14) aus (13)):

$$(n-1)\mu^2.$$

Damit wird endlich der Durchschnittswerth von (28) gleich

$$\frac{(n - 2 + [a^2\alpha^2]) J_4 + (n^2 - 3n + 5 - 3[a^2\alpha^2])\mu^4}{(n-1)^2} - \mu^4$$

d. i. nach einfacher Reduction

$$(29) \qquad \frac{J_4 - \mu^4}{n-1} - \frac{J_4 - 3\mu^4}{(n-1)^2}(1 - [a^2\alpha^2]).$$

Dies ist also das Quadrat des mittlern Fehlers in μ^2 bei einer Unbekannten.

Gauss zeigte, dass für m Unbekannte das Quadrat des m. F. in μ^2 gleich ist

$$(30) \quad \frac{J_4 - \mu^4}{n-m} - \frac{J_4 - 3\mu^4}{(n-m)^2}(m - [(a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots)^2])$$

und es ist mithin (vergl. §. 4. S. 25 oben) der mittlere Fehler in μ gleich

$$(31) \quad \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{J_4 - \mu^4}{n-m} - \frac{J_4 - 3\mu^4}{(n-m)^2}(m - [(a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots)^2])}.$$

Für das Fehlergesetz III wird $J_4 = 3\mu^4$ und daher der m. F. in μ gleich

$$\mp \frac{\mu}{\sqrt{2(n-m)}} \tag{32}$$

oder es liegt μ zwischen den mittlern Grenzwerthen

$$\mu\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2(n-m)}}\right) \text{ und } \mu\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2(n-m)}}\right). \tag{33}$$

Insofern das Gesetz III im Allgemeinen eine genügende Annäherung an das wirkliche Vorkommen zufälliger Fehler giebt, können wir die Formeln (32) und (33) allgemein als Näherungswerthe benutzen.

Gauss zeigte, dass für ein beliebiges Fehlergesetz der Ausdruck (30) zwischen den Grenzen

$$\frac{2\mu^4}{n-m}\left(\frac{J_4}{\mu^4} - 2\right) \text{ und } \frac{2\mu^4}{n-m} \tag{34}$$

liegt. Sobald nun J_4 nicht grösser ist als $3\mu^4$, wird der Grenzwerth rechter Hand nicht der kleinere sein und wird man daher die Genauigkeit des berechneten Werthes von μ^2 nicht zu gross schätzen, wenn man sein mittleres Fehlerquadrat gleich diesem Grenzwerth annimmt. Damit ergeben sich aber wieder die Formeln (32) und (33). Für die Annahmen I und II ist in der That nach §. 4. $J_4 < 3\mu^4$.

§. 16.

Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen ungleicher Genauigkeit.

Haben die Beobachtungen l ungleiche Genauigkeit, also auch in Bezug auf eine beliebige Gewichtseinheit verschiedene Gewichte g, nämlich

$$l_1 \ldots g_1$$
$$l_2 \ldots g_2$$
$$l_3 \ldots g_3$$
$$l_4 \ldots g_4$$

so können wir uns denken, dass die Grössen

$$l_1\sqrt{g_1} \quad l_2\sqrt{g_2} \quad l_3\sqrt{g_3} \quad l_4\sqrt{g_4}$$

beobachtet worden seien, denen gleiches Gewicht, nämlich das Gewicht 1, zukommt. Die Fehlergleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ \lambda_2 &= -l_2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ \lambda_3 &= -l_3 + a_3 x + b_3 y + c_3 z \\ \lambda_4 &= -l_4 + a_4 x + b_4 y + c_4 z \end{aligned}$$

können durch Multiplication mit den Wurzeln der resp. g so umgewandelt werden, dass sie den Beobachtungen vom Gewicht 1 entsprechen:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \lambda_1\sqrt{g_1} &= -l_1\sqrt{g_1} + a_1\sqrt{g_1}x + b_1\sqrt{g_1}y + c_1\sqrt{g_1}z \\ \lambda_2\sqrt{g_2} &= -l_2\sqrt{g_2} + a_2\sqrt{g_2}x + b_2\sqrt{g_2}y + c_2\sqrt{g_2}z \\ \lambda_3\sqrt{g_3} &= -l_3\sqrt{g_3} + a_3\sqrt{g_3}x + b_3\sqrt{g_3}y + c_3\sqrt{g_3}z \\ \lambda_4\sqrt{g_4} &= -l_4\sqrt{g_4} + a_4\sqrt{g_4}x + b_4\sqrt{g_4}y + c_4\sqrt{g_4}z \end{aligned}$$

und nunmehr können alle Formeln, die für die Ausgleichungen von Beobachtungen gleicher Genauigkeit gefunden worden sind, angewendet werden, nur ist in denselben zu setzen

$$(3)\qquad \begin{aligned} &\text{anstatt } \lambda_1 \ldots \lambda_1\sqrt{g_1} \\ &\quad\text{„ } l_1 \ldots l_1\sqrt{g_1} \\ &\quad\text{„ } a_1 \ldots a_1\sqrt{g_1} \\ &\quad\text{„ } b_1 \ldots b_1\sqrt{g_1} \end{aligned}$$

u. s. f.

Die Ausgleichung giebt nun anstatt „$[\lambda\lambda]$ *ein Minimum*“ für die Summe

$$(4)\qquad [\lambda\lambda g] \textit{ ein Minimum.}$$

Die Normalgleichungen gehen über in

$$(5)\qquad \begin{aligned} [aag]x + [abg]y + [acg]z &= [alg] \\ [abg]x + [bbg]y + [bcg]z &= [blg] \\ [acg]x + [bcg]y + [ccg]z &= [clg] \end{aligned}$$

worin z. B.

$$[abg] = a_1 b_1 g_1 + a_2 b_2 g_2 + a_3 b_3 g_3 + a_4 b_4 g_4;$$

aber man schreibt dafür gewöhnlich symbolisch

$$(6)\qquad \begin{aligned} (aa)x + (ab)y + (ac)z &= (al) \\ (ab)x + (bb)y + (bc)z &= (bl) \\ (ac)x + (bc)y + (cc)z &= (cl) \end{aligned}$$

Alle Formeln, welche wir früher aus den entsprechenden Gleichungen mit eckigen Klammern abgeleitet haben, lassen sich nun in gleicher Weise aus dem System (6) entwickeln, nur werden allenthalben die eckigen Klammern der Coefficienten und der rechten Seiten der Normalgleichungen und ihrer Abgeleiteten durch runde Klammern zu ersetzen sein, um anzudeuten, dass bei Bildung der Normalgleichungen die Gewichte berücksichtigt sind.

Noch wollen wir erwähnen, dass die Formel für die Berechnung des mittlern Fehlers einer Beobachtung vom Gewicht 1 wird

$$(7) \quad \mu = \mp \sqrt{\frac{[\lambda\sqrt{g} \cdot \lambda\sqrt{g}]}{n-m}} = \mp \sqrt{\frac{[\lambda\lambda g]}{n-m}} = \mp \sqrt{\frac{(\lambda\lambda)}{n-m}}$$

denn die Producte $\lambda\sqrt{g}$ sind die übrigbleibenden Fehler des Fehlergleichungssystems (2) und auf dieses ist die frühere Formel für Beobachtungen gleicher Genauigkeit anwendbar.

Man hat ferner für den Durchschnittsfehler einer Beobachtung vom Gewicht 1

$$(7^*) \qquad \vartheta = \mp \frac{[\text{val. abs. } \lambda\sqrt{g}]}{\sqrt{n(n-m)}}.$$

Da die Genauigkeit dieser Formeln wächst mit zunehmendem Nenner $n - m$, so wird man n möglichst gross nehmen, d. h. man wird in dem Falle, wo die in die Ausgleichung eingeführten Beobachtungswerthe arithmetische Mittel von Beobachtungswerthen sind, auf diese zurückgehen. (Vergl. §. 8. Beispiel 1.)

§. 17.

Zusammenstellung der Formeln für die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen.

Seien gegeben $n = 5$ Beobachtungswerthe $l_1\ l_2\ l_3\ l_4\ l_5$
mit den Gewichten . . . . . $g_1 g_2 g_3 g_4 g_5$
und den $m = 4$ Unbekannten . . . . . $x\ y\ z\ t$
so hat man die $n = 5$ Fehlergleichungen:

$$(1)\qquad \begin{array}{l|l} \lambda_1 = -l_1 + a_1x + b_1y + c_1z + d_1t & g_1 \\ \lambda_2 = -l_2 + a_2x + b_2y + c_2z + d_2t & g_2 \\ \lambda_3 = -l_3 + a_3x + b_3y + c_3z + d_3t & g_3 \\ \lambda_4 = -l_4 + a_4x + b_4y + c_4z + d_4t & g_4 \\ \lambda_5 = -l_5 + a_5x + b_5y + c_5z + d_5t & g_5 \end{array}$$

und die $n = 4$ Normalgleichungen

$$(2)\qquad \begin{array}{l} (aa)x + (ab)y + (ac)z + (ad)t = (al) \\ (ab)x + (bb)y + (bc)z + (bd)t = (bl) \\ (ac)x + (bc)y + (cc)z + (cd)t = (cl) \\ (ad)x + (bd)y + (cd)z + (dd)t = (dl) \end{array}$$

worin u. A.

$$(aa) = a_1a_1g_1 + a_2a_2g_2 + a_3a_3g_3 + a_4a_4g_4 + a_5a_5g_5$$
$$(ab) = a_1b_1g_1 + a_2b_2g_2 + a_3b_3g_3 + a_4b_4g_4 + a_5b_5g_5$$
$$(al) = a_1l_1g_1 + a_2l_2g_2 + a_3l_3g_3 + a_4l_4g_4 + a_5l_5g_5$$

I. Auflösungsverfahren. Allgemeine Auflösung der Normalgleichungen in der Form:

$$(3)\qquad \begin{array}{l} (aa)A + (ab)B + (ac)C + (ad)D = P \\ (ab)A + (bb)B + (bc)C + (bd)D = Q \\ (ac)A + (bc)B + (cc)C + (cd)D = R \\ (ad)A + (bd)B + (cd)C + (dd)D = S \end{array}$$

woraus folgt das umgekehrte System:

$$(4)\qquad \begin{array}{l} Q_{1.1}P + Q_{1.2}Q + Q_{1.3}R + Q_{1.4}S = A \\ Q_{1.2}P + Q_{2.2}Q + Q_{2.3}R + Q_{2.4}S = B \\ Q_{1.3}P + Q_{2.3}Q + Q_{3.3}R + Q_{3.4}S = C \\ Q_{1.4}P + Q_{2.4}Q + Q_{3.4}R + Q_{4.4}S = D \end{array}$$

$$(5)\quad \text{Für} \left\{ \begin{array}{l} P = (al) \\ Q = (bl) \\ R = (cl) \\ S = (dl) \end{array} \right\} \text{gehen über} \left\{ \begin{array}{l} A \text{ in } x \\ B \text{ in } y \\ C \text{ in } z \\ D \text{ in } t \end{array} \right\} \text{mit den Gewichten} \left\{ \begin{array}{l} Q_{1.1} \\ Q_{2.2} \\ Q_{3.3} \\ Q_{4.4} \end{array} \right\}$$

II. Auflösungsverfahren, Algorithmus nach Gauss, mit einer Controlle durch doppelte Bildung der Summennormalgleichungen.

Man bilde die Coefficientensummen der Fehlergleichungen

$$(6)\qquad \begin{aligned} s_1 &= a_1 + b_1 + c_1 + d_1 \\ s_2 &= a_2 + b_2 + c_2 + d_2 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ s_5 &= a_5 + b_5 + c_5 + d_5 \end{aligned}$$

und damit die Gleichung (1. Summengleichung)

$$(7)\qquad (as)x + (bs)y + (cs)z + (ds)t = (sl)$$

die mit der Summe von (2) übereinstimmen muss.

Auflösung der Normal- und Gewichtsgleichungen nach den — mit Hülfe des Gegebenen wohl verständlichen — Schematen (worin der dreifache Verticalstrich das Gleichheitszeichen ersetzt):

(I)

x	y	z	t		(x)
(aa)	(ab)	(ac)	(ad)	(al)	1
(ab)	(bb)	(bc)	(bd)	(bl)	0
(ac)	(bc)	(cc)	(cd)	(cl)	0
(ad)	(bd)	(cd)	(dd)	(dl)	0
(as)	(bs)	(cs)	(ds)	(sl)	1

(II)

y	z	t		(x)	(y)
$(bb.1)$	$(bc.1)$	$(bd.1)$	$(bl.1)$	$-\alpha_1'$	1
$(bc.1)$	$(cc.1)$	$(cd.1)$	$(cl.1)$	$-\beta_1'$	0
$(bd.1)$	$(cd.1)$	$(dd.1)$	$(dl.1)$	$-\gamma_1'$	0
$(bs.1)$	$(cs.1)$	$(ds.1)$	$(sl.1)$	$\div$	1

(III)

z	t		(x)	(y)	(z)
$(cc.2)$	$(cd.2)$	$(cl.2)$	$-\alpha_2'$	$-\beta_2'$	1
$(cd.2)$	$(dd.2)$	$(dl.2)$	$\div$	$-\gamma_2'$	0
$(cs.2)$	$(ds.2)$	$(sl.2)$	$\div$	$\div$	1

	t		(x)	(y)	(z)	(t)
(IV)	$(dd.3)$	$(dl.3)$	$-\alpha_3'$	$-\beta_3'$	$-\gamma_3'$	1
	$(ds.3)$	$(sl.3)$	$\div$	$\div$	$\div$	1

Die Zeichen $\div$ bedeuten hierin Glieder, für welche besondere Symbole einzuführen nicht nöthig erschien, welche sich aber analog den andern Gliedern derselben Horizontalreihe entwickeln.

Die Köpfe (x) (y) (z) (t) bezeichnen die Verticalcolonnen, welche sich auf die Gewichtsgleichungssysteme für $x\ y\ z\ t$ beziehen.

Die Summe der Glieder jeder Verticalreihe in jedem Schema, das Glied der Summengleichung ausgenommen, muss mit diesem übereinstimmen.

Gleichzeitig mit der Bildung von (II. III. IV) bilde man das Schema

	x	y	z	t		(x)	(y)	(z)	(t)
	(aa)	(ab)	(ac)	(ad)	(al)	1			
(V)		$(bb.1)$	$(bc.1)$	$(bd.1)$	$(bl.1)$	$-\alpha_1'$	1		
			$(cc.2)$	$(cd.2)$	$(cl.2)$	$-\alpha_2'$	$-\beta_2'$	1	
				$(dd.3)$	$(dl.3)$	$-\alpha_3'$	$-\beta_3'$	$-\gamma_3'$	1

sowie das Schema

	x	y	z	t		(x)	(y)	(z)	(t)
	1	α_1'	β_1'	γ_1'	χ_1	$\frac{1}{(aa)}$			
(VI)		1	β_2'	γ_2'	χ_2	$-\frac{\alpha_1'}{(bb.1)}$	$\frac{1}{(bb.1)}$		
			1	γ_3'	χ_3	$-\frac{\alpha_2'}{(cc.2)}$	$-\frac{\beta_2'}{(cc.2)}$	$\frac{1}{(cc.2)}$	
				1	χ_4	$-\frac{\alpha_3'}{(dd.3)}$	$-\frac{\beta_3'}{(dd.3)}$	$-\frac{\gamma_3'}{(dd.3)}$	$\frac{1}{(dd.3)}$

Beide Schemata kann man auch in einander schreiben, Zeile für Zeile, was den Vortheil gewährt, die zusammengehörigen Grössen auch beisammen zu haben.

Die unterste Horizontalreihe in (VI) rechts vom dreifachen Striche, d. i.

χ_4	$-\frac{\alpha_3'}{(dd.3)}$	$-\frac{\beta_3'}{(dd.3)}$	$-\frac{\gamma_3'}{(dd.3)}$	$\frac{1}{(dd.3)}$

ergiebt resp. die Werthe (vergl. auch §. 13.) (VII)

t	$Q_{1.4}$	$Q_{2.4}$	$Q_{3.4}$	$Q_{4.4}$

Damit folgt aus der dritten Horizontalreihe (VI):

χ_3	$-\frac{\alpha_2'}{(cc.2)}$	$-\frac{\beta_2'}{(cc.2)}$	$\frac{1}{(cc.2)}$
$-\gamma_3' t$	$-\gamma_3' Q_{1.4}$	$-\gamma_3' Q_{2.4}$	$-\gamma_3' Q_{3.4}$

(VIII)

d. s. die Werthe

z	$Q_{1.3}$	$Q_{2.3}$	$Q_{3.3}$

Ferner giebt hiermit die zweite Horizontalreihe (VI):

χ_2	$-\frac{\alpha_1'}{(bb.1)}$	$\frac{1}{(bb.1)}$
$-\beta_2' z$	$-\beta_2' Q_{1.3}$	$-\beta_2' Q_{2.3}$
$-\gamma_2' t$	$-\gamma_2' Q_{1.4}$	$-\gamma_2' Q_{2.4}$

(IX)

d. s. aber die Werthe

y	$Q_{1.2}$	$Q_{2.2}$

Endlich hat man ebenso aus der ersten Horizontalreihe (VI):

χ_1	$\frac{1}{(aa)}$
$-\alpha_1' y$	$-\alpha_1' Q_{1.2}$
$-\beta_1' z$	$-\beta_1' Q_{1.3}$
$-\gamma_1' t$	$-\gamma_1' Q_{1.4}$

(X)

d. s. aber die Werthe

x	$Q_{1.1}$

Die Zusammenstellung der letzten Horizontalreihen von (VII bis X) giebt die vollständige Auflösung:

(XI)

x	$Q_{1.1}$			
y	$Q_{1.2}$	$Q_{2.2}$		
z	$Q_{1.3}$	$Q_{2.3}$	$Q_{3.3}$	
t	$Q_{1.4}$	$Q_{2.4}$	$Q_{3.4}$	$Q_{4.4}$
1.	2.	3.	4.	5.

Die 1. Verticalcolonne giebt die Unbekannten, die 2. 3. 4. 5. geben die Hülfsgrössen Q und insbesondere ist die oberste Zahl jeder derselben das reciproke Gewicht der Unbekannten in derselben Horizontalen.

Die in (VIII. IX. X) ermittelten Werthe kann man sofort controlliren durch Substitution in die Summengleichungen von resp. (III. II. I); doch kann man sich auch begnügen, nur am Schlusse nach völliger Entwicklung von (XI) durch Substitution in die Summengleichungen von (I) eine allgemeine Controlle auszuführen. Diese letzteren Summengleichungen lauten getrennt aufgeführt:

(XII)
$$\begin{aligned}
&(as)x + (bs)y + (cs)z + (ds)t = (sl)\\
&(as)Q_{1.1} + (bs)Q_{1.2} + (cs)Q_{1.3} + (ds)Q_{1.4} = 1\\
&(as)Q_{1.2} + (bs)Q_{2.2} + (cs)Q_{2.3} + (ds)Q_{2.4} = 1\\
&(as)Q_{1.3} + (bs)Q_{2.3} + (cs)Q_{3.3} + (ds)Q_{3.4} = 1\\
&(as)Q_{1.4} + (bs)Q_{2.4} + (cs)Q_{3.4} + (ds)Q_{4.4} = 1
\end{aligned}$$

deren erste beiden in (I) vorkommen; die übrigen entsprechen den Summen der Gewichtsgleichungen für yzt in der ursprünglichen Form, wie §. 11. (12. und 13.) und §. 13. (44).

III. Auflösungsverfahren. Nachdem man bis (VI) gelangt ist, geben (V) und (VI) nach dem Schema

(XIII)
$$\begin{aligned}
&\chi_1 - \chi_2\alpha_1' - \chi_3\alpha_2' - \chi_4\alpha_3' = x\\
&\chi_2 - \chi_3\beta_2' - \chi_4\beta_3' = y\\
&\chi_3 - \chi_4\gamma_3' = z\\
&\chi_4 = t
\end{aligned}$$

die Werthe der Unbekannten, deren reciproke Gewichte folgendes Schema finden lässt:

(XIV)
$$\begin{array}{r}
\frac{1}{(a\,a)} + \frac{\alpha_1'\,\alpha_1'}{(b\,b.1)} + \frac{\alpha_2'\,\alpha_2'}{(c\,c.2)} + \frac{\alpha_3'\,\alpha_3'}{(d\,d.3)} = Q_{1.1} \\
\frac{1}{(b\,b.1)} + \frac{\beta_2'\,\beta_2'}{(c\,c.2)} + \frac{\beta_3'\,\beta_3'}{(d\,d.3)} = Q_{2.2} \\
\frac{1}{(c\,c.2)} + \frac{\gamma_3'\,\gamma_3'}{(d\,d.3)} = Q_{3.3} \\
\frac{1}{(d\,d.3)} = Q_{4.4}
\end{array}$$

Bei der Ausführung der Rechnung wird man die hier horizontalen Reihen vertical stellen.

Bei dem zweiten und dritten Auflösungsverfahren, enthalten (V) und (VI) in bequemer Form das ganze Ausgleichungsresultat, von wo aus der Uebergang zu den Werthen der einzelnen Unbekannten und Hülfsgrössen Q leicht ist. Für beide Verfahren ist eine summarische Controlle der Berechnung der Werthe der Unbekannten möglich durch Berechnung von $[\lambda\lambda g]$ aus den einzelnen λ, welche aus (1) durch Substitution jener folgen, und eine zweite Berechnung dieser Summe nach der Formel:

(8) $[\lambda\lambda g] = (\lambda\lambda) = (ll) - \chi_1(al) - \chi_2(bl.1) - \chi_3(cl.2) - \chi_4(dl.3)$

Bei dem ersten Auflösungsverfahren ist anstatt Formel (8) anzuwenden

(8*) $(\lambda\lambda) = (ll) - (al)x - (bl)y - (cl)z - (dl)t.$

Für den mittlern zu befürchtenden Fehler der Gewichtseinheit ist zu setzen:

(9) $$\mu = \mp\sqrt{\frac{(\lambda\lambda)}{n-m}}$$

und für die mittlern zu befürchtenden Fehler in $x\ y\ z\ t$

(10) $\mu_x = \mu\sqrt{Q_{1.1}}\quad \mu_y = \mu\sqrt{Q_{2.2}}\quad \mu_z = \mu\sqrt{Q_{3.3}}\quad \mu_t = \mu\sqrt{Q_{4.4}}.$

Die mittleren Grenzen des mittlern Fehlers μ sind näherungsweise

(9*) $$\mu\left(1 \mp \frac{1}{\sqrt{2\,(n-m)}}\right).$$

Als mittlere zu befürchtende Abweichungen von der Wahrheit sind $\mu\ \mu_x \ldots \mu_t$ nur in dem Falle zu betrachten, wenn das Vorkommen der wahren Beobachtungsfehler der Bedingung $\varphi(+\varepsilon) = \varphi(-\varepsilon)$ genügt.

Beispiel 2*. (Forts. zu Beisp. 2 in §. 5 S. 32.)

Bei Ausgleichung der im Beispiel 2 (1) gegebenen Winkelwerthe setzten wir bisher dieselben als gleichgenau voraus. Wir wiederholen jetzt die Ausgleichung mit Rücksicht auf die verschiedene Grösse der Repetitionszahlen und zwar nehmen wir die Gewichte einfach proportional denselben, betrachten also ein Resultat aus n Repetitionen wie ein Mittel aus n einfachen Winkelmessungen. Gefordert wird diese Anschauungsweise dadurch, dass im Ganzen sehr vielmal repetirt ist und daher in den Resultaten der Theilungsfehler des Instruments gar nicht mehr über den Einfluss der Visurfehler überwiegt, sondern von diesem überwogen wird. (Beispiel 25.)

Die Fehlergleichungen werden mit Beibehaltung der früheren Bezeichnung und Näherungswerthe:

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{lllll|l|l}
\lambda_1 = & 0.00 & . & . & +\zeta\ . & \text{Gew. } 90 & s = 1 \\
\lambda_2 = & 0.00 & . & . & .\ +\tau & \text{„ } 80 & \text{„ } 1 \\
\lambda_3 = & -0.14 & . & . & -\zeta+\tau & \text{„ } 70 & \text{„ } 0 \\
\lambda_4 = & -0.79 & . & -\eta & .\ +\tau & \text{„ } 20 & \text{„ } 0 \\
\lambda_5 = & 0.00 & . & +\eta & .\ . & \text{„ } 20 & \text{„ } 1 \\
\lambda_6 = & +0.26 & -\xi & . & +\zeta\ . & \text{„ } 40 & \text{„ } 0 \\
\lambda_7 = & 0.00 & +\xi & . & .\ . & \text{„ } 60 & \text{„ } 1 \\
\lambda_8 = & -0.51 & -\xi & +\eta & .\ . & \text{„ } 20 & \text{„ } 0
\end{array}\right.$$

Wir bilden nun die Normalgleichungen; diejenige von ξ erhalten wir durch Multiplication der Gleichungen für $\lambda_6\ \lambda_7\ \lambda_8$ mit resp. -40, $+60$, -20. Die Addition ergiebt alsdann

$$0 = -0.20 + 120\xi - 20\eta - 40\zeta$$

In derselben Weise bilden sich die andern Normalgleichungen und damit das Tableau

(2)

ξ	η	ζ	τ		(ξ)
120	— 20	— 40	.	+ 0.20	1
— 20	+ 60	.	— 20	— 5.60	.
— 40	.	+ 200	— 70	—20.20	.
.	— 20	— 70	+ 170	+25.60	.
60	20	90	80	0.00	1

Die letzte Rubrik rechts bezieht sich auf die Gewichtsberechnung, nämlich das Gewichtsgleichungssystem für ξ. Die Summengleichung ist sowohl durch Summirung der Normalgleichungen, als auch direct mit Hülfe der s aus den Fehlergleichungen gebildet, indem jede derselben mit ihrem s und Gewicht multiplicirt und alsdann die Summe gebildet wurde.

Dividiren wir die erste Normalgleichung mit 120, so wird

$$\xi - 0.1667\eta - 0.3333\zeta = + 0.001667;\ 0.008333.$$

Diese Gleichung multipliciren wir mit resp. — 20, — 40, + 60 und setzen dies behufs Subtraction resp. unter die 2., die 3., und die Summen-Gleichung. Die schematische Anordnung ist dann folgende:

(2)

ξ	η	ζ	τ		(ξ)
+ 120	— 20	— 40	.	+ 0.20	1
1	— 0.1667	— 0.3333	.	+ 0.001667	0.008333
— 20	+ 60	.	— 20	— 5.60	.
— 20	+ 3.3333	+ 6.6667	.	— 0.03333	— 0.1667
— 40	.	+ 200	— 70	— 20.20	.
— 40	+ 6.6667	+13.3333	.	— 0.06667	— 0.3333
.	— 20	— 70	+ 170	+ 25.60	.
.	.	.	.	.	.
+ 60	+ 20	+ 90	+ 80	0.00	1
+ 60	— 10	— 20	.	+ 0.10	+ 0.5000

worin sich die grossen Zahlentypen auf die gegebenen Gleichungen (2) beziehen. Die Subtraction ergiebt

(3)

η	ξ	τ		(ξ)	(η)
+ 56.6667	— 6.6667	— 20.0000	— 5.5667	+0.1667	1
— 6.6667	+186.6667	— 70.0000	—20.1333	+0.3333	.
— 20.0000	— 70.0000	+170.0000	+25.6000	.	.
+ 30.0000	+110.0000	+ 80.0000	— 0.1000	+0.5000	1

Die Summengleichung stimmt hierbei vollkommen mit den resp. Summen der Glieder der Verticalreihen. Um überflüssige Rechnung zu vermeiden, beachte man, dass die Coefficientensymmetrie der Gleichungen sowie die Beziehungen zwischen den Zahlen der letzten Verticalcolonne und der ersten Horizontalcolonne in (2) Ersparungen zulassen, mit welchen (2) wie folgt erscheint:

(2*)

ξ	η	ζ	τ		ξ
+ 120	— 20	— 40	.	+ 0.20	1
1	— 0.1667	— 0.3333	.	+ 0.001667	0.008333
— 20	+ 60	.	— 20	— 5.60	.
.	+ 3.3333	+ 6.6667	.	— 0.03333	.
— 40	.	+ 200	— 70	— 20.20	.
.	.	+13.3333	.	— 0.06667	.
.	— 20	— 70	+170	+ 25.60	.
.	.	.	.	.	.
+ 60	+ 20	+ 90	+ 80	0.00	1
.	— 10	— 20	.	+ 0.10	+ 0.5000

Noch erwähnen wir, dass es gut ist nach Division der ersten Gleichung mit 120, die Summe der Quotienten 1, — 0.1667, — 0.3333 etc. (d. i. der Coefficienten von $\xi\ \eta\ \zeta\ \tau$) zu bilden, welche zusammen die Zahl 0.5000 in der Ecke rechts unten geben müssen.

Durch successive Elimination erhalten wir nach und nach weiter:

(3*)

η	ζ	τ		(ξ)	(η)
+ 56.6667	— 6.6667	— 20.0000	— 5.5667	+0.1667	1
1	— 0.11765	— 0.35294	— 0.09823	+ 0.00294	0.01765
— 6.6667	+186.6667	— 70.0000	— 20.1333	+0.3333	.
.	+ 0.7843	+ 2.3529	+ 0.6549	— 0.0197	.
— 20.0000	— 70.0000	+170.0000	+ 25.6000	.	.
.	.	+ 7.0588	+ 1.9646	— 0.0588	.
+ 30.0000	+110.0000	+ 80.0000	— 0.1000	+0.5000	1
.	— 3.5295	— 10.5882	— 2.9469	+ 0.0882	+0.5295

Controllen: 1) 1 — 0.11765 — 0.35294 = + 0.5295. 2) die Summengleichung stimmt verticalcolonnenweise mit der Summe der darüberstehenden Glieder.

(4)

ζ	τ		(ξ)	(η)	(ζ)
+185.8824	— 72.3529	— 20.7882	+ 0.3530	+ 0.1176	1
1	— 0.389240	— 0.111836	+ 0.001899	+ 0.000632	0.005380
— 72.3529	+162.9412	+ 23.6354	+ 0.0588	+ 0.3530	.
.	+ 28.1627	+ 8.0917	— 0.1374	— 0.0458	.
+113.5295	+ 90.5882	+ 2.8469	+ 0.4118	+ 0.4705	1
.	— 44.1904	— 12.6967	+ 0.2156	+ 0.0719	+ 0.6108

Controllen wie vorher.

(5)

τ		(ξ)	(η)	(ζ)	(τ)
+134.7785	+ 15.5437	+ 0.1962	+ 0.3988	+ 0.3892	1
1	+ 0.11533	+ 0.00146	+ 0.00296	+ 0.00289	+0.00742
+134.7786	+ 15.5436	+ 0.1962	+ 0.3986	+ 0.3892	1

Durch Zusammenstellung aller ersten Normalgleichungen erhalten wir die Tableaux (V. VI) §. 17., die hier ineinandergeschachtelt worden sind und welchen die ersten Summengleichungen (XII) §. 17. beigefügt worden sind.*)

(6)

ξ	η	ζ	τ
+120.0000	−20.0000	−40.0000	.
1	− 0.16667	− 0.33333	.
	+56.6667	− 6.6667	− 20.0000
	1	− 0.11765	− 0.35294
		+185.8824	− 72.3529
		1	− 0.38924
			+134.7785
			1
+ 60	+ 20	+ 90	+ 80

	(ξ)	(η)	(ζ)	(τ)
+ 0.2000	1			
+ 0.00167	0.00833			
− 5.5667	+0.1667	1		
− 0.09823	+0.00294	0.01765		
− 20.7882	+0.3530	+0.1176	1	
− 0.11184	+0.00190	+0.00063	0.00538	
+15.5437	+0.1962	+0.3988	+0.3892	1
+ 0.11533	+0.00146	+0.00296	+0.00289	0.00742
0.00	1	1	1	1

*) Des Raumes wegen ist das Doppeltableau beim dreifachen Strich gespalten.

Nach dem Auflösungsverfahren II ist nun weiter:

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
\tau &= +\,0.11533\\
\xi &= -\,0.11184 + 0.38924\,\tau = -\,0.06695\\
\eta &= -\,0.09823 + 0.35294\,\tau + 0.11765\,\xi = -\,0.06541\\
\xi &= +\,0.00167 + 0.33333\,\xi + 0.16667\,\eta = -\,0.03155
\end{aligned}
$$

Jedoch berechnet man besser gleich die Q mit nach Schema VII bis X und hat:

(8)	+ 0.11533	+ 0.00146	+ 0.00296	+ 0.00289	+ 0.00742 aus (6)
	τ	$Q_{1.4}$	$Q_{2.4}$	$Q_{3.4}$	$Q_{4.4}$
Factor:	− 0.11184	+ 0.00190	+ 0.00063	+ 0.00538 aus (6)	
+ 0.38924	+ 0.04489	+ 0.00057	+ 0.00115	+ 0.00112 aus (8)	
(9)	− 0.06695	+ 0.00247	+ 0.00178	+ 0.00650	
	ξ	$Q_{1.3}$	$Q_{2.3}$	$Q_{3.3}$	
Factoren:	− 0.09823	+ 0.00294	+ 0.01765 aus (6)		
+ 0.11765	− 0.00788	+ 0.00029	+ 0.00021 aus (9)		
+ 0.35294	+ 0.04070	+ 0.00052	+ 0.00104 aus (8)		
(10)	− 0.06541	+ 0.00375	+ 0.01890		
	η	$Q_{1.2}$	$Q_{2.2}$		
Factoren:	+ 0.00167	+ 0.00833 aus (6)			
+ 0.16667	− 0.01090	+ 0.00063 aus (10)			
+ 0.33333	− 0.02232	+ 0.00082 aus (9)			
(11)	− 0.03155	+ 0.00978			
	ξ	$Q_{1.1}$			

Zur Prüfung setzen wir in die ersten Summengleichungen (6) nach einander die Unbekanntensysteme $\xi\ \eta\ \tau\ \zeta$; $Q_{1.1}\ Q_{1.2}\ Q_{1.3}\ Q_{1.4}$; $Q_{1.2}\ Q_{2.2}\ Q_{2.3}\ Q_{2.4}$; $Q_{1.3}\ Q_{2.3}\ Q_{3.3}\ Q_{3.4}$; $Q_{1.4}\ Q_{2.4}\ Q_{3.4}\ Q_{4.4}$; ein und haben:

	− 1.8930	0.5858	0.2250	0.1482	0.0876
	− 1.3082	0.0750	0.3780	0.0356	0.0592
	− 6.0255	0.2223	0.1602	0.5850	0.2601
	+ 9.2264	0.1168	0.2368	0.2312	0.5936
Sa.	− 0.0003	0.9999	1.0000	1.0000	1.0005
Soll sein:	0.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Die Uebereinstimmung ist befriedigend.

Nach dem dritten Auflösungsverfahren haben wir aus (6) für $\xi\ \eta\ \zeta\ \tau$

$$
\begin{aligned}
&+ 0.00167 \times 1 &&= + 0.00167\\
&- 0.09823 \times 0.1667 &&= - 0.01637\\
&- 0.11184 \times 0.3530 &&= - 0.03948\\
&+ 0.11533 \times 0.1962 &&= + 0.02263\\
& &\xi &= - 0.03155
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- 0.09823 \times 1 &&= - 0.09823\\
&- 0.11184 \times 0.1176 &&= - 0.01315\\
&+ 0.11533 \times 0.3988 &&= + 0.04599\\
& &\eta &= - 0.06539
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

$$
\begin{aligned}
&- 0.11184 \times 1 &&= - 0.11184\\
&+ 0.11533 \times 0.3892 &&= + 0.04489\\
& &\zeta &= - 0.06695\\
& &\tau &= + 0.11533
\end{aligned}
$$

und für die reciproken Gewichte der Unbekannten einfach die Summen der Producte je zwei untereinanderstehender Zahlen der Verticalreihen in (6) für $(\xi)\ (\eta)\ (\zeta)\ (\tau)$ also z. B.

$$
\begin{aligned}
Q_{1.1} = 0.00833 &+ 0.1667 \times 0.00294 + 0.3530 \times 0.00190\\
&+ 0.1962 \times 0.00146
\end{aligned}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&Q_{1.1} = 0.00833 + 0.00049 + 0.00067 + 0.00029 = 0.00978\\
&\text{Ferner wird}\\
&Q_{2.2} = 0.01765 + 0.00007 + 0.00118 = 0.01890\\
&Q_{3.3} = 0.00538 + 0.00113 = 0.00651\\
&Q_{4.4} = 0.00742
\end{aligned}
\right.
\qquad (13)
$$

Bei dieser Berechnung der reciproken Gewichte lässt sich die Controlle durch die resp. Summengleichung für die Q nicht ausführen; aber sie wird auch kaum nöthig werden, da alle Zahlen in (6) hinreichend controllirt sind und die Berechnung der reciproken Gewichte so sehr einfach ist, insbesondere frei von Irrungen im Vorzeichen.

Gemeinsam für beide Auflösungsmethoden ist die weitere Rechnung. Man erhält aus den Fehlergleichungen durch Substitution der Unbekannten

(14)
$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -\ 0.0670 \quad \text{Gew. } 90\\
\lambda_2 &= +\ 0.1153 \quad \text{„ } 80\\
\lambda_3 &= +\ 0.0423 \quad \text{„ } 70\\
\lambda_4 &= -\ 0.6093 \quad \text{„ } 20\\
\lambda_5 &= -\ 0.0654 \quad \text{„ } 20\\
\lambda_6 &= +\ 0.2254 \quad \text{„ } 40\\
\lambda_7 &= -\ 0.0324 \quad \text{„ } 60\\
\lambda_8 &= -\ 0.5430 \quad \text{„ } 20
\end{aligned}$$

und damit $[\lambda\lambda g] = (\lambda\lambda) = 17.0954$. Dagegen ist nach (1) $[llg] = (ll) = 21.760$ und daher nach (6) ferner

$$(\lambda\lambda) = 21.760 - \{0.2000 \times 0.00167 + 5.5667 \times 0.09823 + 20.7882 \times 0.11184 + 15.5437 \times 0.11533\}$$

oder

$$(\lambda\lambda) = 21.760 - \{0.00033 + 0.54682 + 2.32495 + 1.79266\}$$

und daher

(15) $$(\lambda\lambda) = 17.0952$$

in genügender Uebereinstimmung mit dem aus den Einzelwerthen der λ folgenden Werthe.

Indem die Anzahl der Fehlergleichungen 8, die der Unbekannten 4 ist, wird

(16) $$\mu = \mp\sqrt{\frac{17.0954}{8-4}} = \mp\sqrt{4.2738} = \mp 2''.067$$

der mittlere Fehler eines einfach repetirten Winkels. Doch ist zu beachten, dass μ nur für grosse Repetitionszahlen gelten kann; wir setzen daher, um dies anzudeuten:

$$(17) \qquad \mu_{(50)} = \mp\sqrt{\frac{4.2738}{50}} = \mp 0''.292$$

als mittlern Fehler eines 50mal repetirten Winkels.

Man hat noch

$$(18) \quad \begin{aligned} \mu_\xi &= \mp\sqrt{4.2738 \times 0.00978} = \mp\sqrt{0.04179} = \mp 0''.204 \\ \mu_\eta &= \mp\sqrt{4.2738 \times 0.01890} = \mp\sqrt{0.08077} = \mp 0''.284 \\ \mu_\zeta &= \mp\sqrt{4.2738 \times 0.00651} = \mp\sqrt{0.02782} = \mp 0''.167 \\ \mu_\tau &= \mp\sqrt{4.2738 \times 0.00742} = \mp\sqrt{0.03171} = \mp 0''.178 \end{aligned}$$

und damit die Endwerthe:

$$(19) \quad \begin{aligned} \sphericalangle BN = x &= 6^0\,59'\,34.478 \mp 0.204 \\ \sphericalangle BH = y &= 18^0\,43'\,45.535 \mp 0.284 \\ \sphericalangle BA = z &= 19^0\,25'\,59.353 \mp 0.167 \\ \sphericalangle BW = t &= 34^0\,18'\,43.725 \mp 0.178 \end{aligned}$$

Die verbesserten Beobachtungswerthe sind

$$(20) \quad \begin{aligned} BA &= 19^0\,25'\,59''.353 \\ BW &= 34^0\,18'\,43''.725 \\ AW &= 14^0\,52'\,44''.372 \\ HW &= 15^0\,34'\,58''.191 \\ BH &= 18^0\,43'\,45''.535 \\ NA &= 12^0\,26'\,24''.875 \\ BN &= 6^0\,59'\,34''.478 \\ NH &= 11^0\,44'\,11''.057 \end{aligned}$$

welche nunmehr den mathematischen Relationen genügen.

Die Producte $\lambda\sqrt{g}$ oder die Fehler reducirt aufs Gewicht 1 sind resp.

$$(21) \quad \begin{aligned} 1.&\ -0.6356 \\ 2.&\ +1.0313 \\ 3.&\ +0.3539 \\ 4.&\ -2.7249 \\ 5.&\ -0.2925 \\ 6.&\ +1.4256 \\ 7.&\ -0.2510 \\ 8.&\ -2.4284 \end{aligned}$$

Berechnen wir mit Hülfe der absoluten Werthe derselben (obgleich man in der Praxis davon absehen wird wegen der Rechnungsunbequemlichkeit) noch den Durchschnittsfehler ϑ, so haben wir

$$\vartheta = \frac{\mp 9.143}{\sqrt{8\,(8-4)}} = \mp 1.616 \tag{22}$$

und daher

$$\mu : \vartheta = 1.279. \tag{23}$$

§. 18.

Nichtlineare Relationen. Einführung von Näherungswerthen. Indirecte Auflösung der Normalgleichungen. Aufstellung der Normalgleichungen mit Hülfe von Quadrattafeln. Rechenmaschine von Thomas zur Rechnung ohne Logarithmen; Gauss'sche Logarithmen zur Rechnung mit Logarithmen.

I. Nichtlineare Relationen. Einführung von Näherungswerthen. Ist der Zusammenhang zwischen den Beobachtungsgrössen und den Unbekannten kein linearer, so ist es erforderlich, für letztere möglichst genaue Näherungswerthe einzuführen, welche durch die Ausgleichung nur noch kleine Verbesserungen erhalten.

Wie man sich diese Näherungswerthe verschafft, ist gleichgültig; können sie aus früheren Bestimmungen nicht entnommen werden, so muss man soviel Gleichungen, als zu ihrer Bestimmung nöthig sind, mittelst der gegebenen Beobachtungen bilden und nach den Unbekannten auflösen. Durch zweckmässige Auswahl unter den Beobachtungswerthen wird man möglichste Einfachheit der Rechnung, aber auch möglichste Schärfe der Näherungswerthe zu erreichen suchen. Die Reduction auf die lineare Form ist nämlich nur zulässig, wenn man die zweiten und höheren Potenzen der an den Näherungswerthen anzubringenden Verbesserungen als so klein voraussetzen kann, dass man ihren Einfluss vernachlässigen darf:

Seien (x) (y) (z) die Näherungswerthe von x y z und ξ η ζ die plausibelsten Verbesserungen, sodass

$$x = (x) + \xi \qquad y = (y) + \eta \qquad z = (z) + \zeta. \tag{1}$$

Sei ferner der Zusammenhang zwischen einer ausgeglichenen Beobachtungsgrösse und $x\ y\ z$ gegeben durch

$$l + \lambda = f(x\ y\ z) \tag{2}$$

so ist nach dem Taylor'schen Satze mit obenbemerkter Vernachlässigung

$$\left\{\begin{array}{l} l + \lambda = f((x)(y)(z)) + \frac{\partial f}{\partial x}\xi + \frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial z}\zeta \\ \text{oder abgekürzt} \\ \qquad l + \lambda = (l) + a\xi + b\eta + c\zeta \end{array}\right. \tag{3}$$

wobei (l) wie auch die numerischen Werthe der Differentialquotienten $a\ b\ c$ mittelst $(x)\ (y)\ (z)$ zu berechnen sind. Man hat somit die lineare Fehlergleichung

$$\lambda = -(l - (l)) + a\xi + b\eta + c\zeta\ . \tag{3*}$$

worin man $l - (l)$ auch ausdrückt als Beob. — Rechn.

Sollte sich nach vollendeter Ausgleichung herausstellen, dass $\xi\ \eta\ \zeta$ zu erhebliche Werthe erlangen, um die Entwicklung von (2) nach (3) unter zu Grundelegung der Näherungswerthe $(x)\ (y)\ (z)$ als genügend erachten zu können, so muss mit den verbesserten Werthen der Unbekannten eine neue Rechnung durchgeführt werden.

Die Einführung von Näherungswerthen ist auch bei linearem Zusammenhange der Beobachtungsgrössen und Unbekannten anzurathen. Nicht nur werden grobe Beobachtungsfehler dadurch sofort entdeckt, sondern es ergiebt sich auch eine viel bequemere Rechnung, da die Differenzen Beob. — Rechn. nur kleine Zahlen sein werden, was die Berechnung der rechten Seiten der Normalgleichungen sehr erleichtert. Würden diese zufällig Null (also auch die Verbesserungen der Näherungswerthe), so würde die in $a\ b\ c$ $(aa)\ (ab)\ \ldots$ beizubehaltende Stellenzahl sich nur richten nach der in die Gewichtsberechnung zu legenden Schärfe.

II. Indirecte Auflösung der Normalgleichungen. Sie beruht darauf, dass im Allgemeinen jede Normalgleichung von derjenigen Unbekannten besonders beeinflusst wird, deren Coefficient der quadratische ist. Seien die Normalgleichungen, die rechten Seiten mit nach links geschafft,

$$
\begin{aligned}
(aa)x + (ab)y + (ac)z - (al) &= 0 \\
(ab)x + (bb)y + (bc)z - (bl) &= 0 \\
(ac)x + (bc)y + (cc)z - (cl) &= 0
\end{aligned} \tag{4}
$$

so setzt man (nach Jacobi) als erste Näherungswerthe

$$x_1 = \frac{(al)}{(aa)} \quad y_1 = \frac{(bl)}{(bb)} \quad z_1 = \frac{(cl)}{(cc)}. \tag{5}$$

Die Gleichungen (4) geben hiermit nicht Null, sondern Werthe $(al)'$ $(bl)'$ $(cl)'$ und man setzt nun als Verbesserungen von x_1 y_1 z_1

$$x_2 = \frac{(al)'}{(aa)} \quad y_2 = \frac{(bl)'}{(bb)} \quad z_2 = \frac{(cl)'}{(cc)}. \tag{6}$$

Führt man nun $x_1 + x_2$, $y_1 + y_2$, $z_1 + z_2$ in (4) ein, so ergiebt sich anstatt Null eine Werthreihe $(al)''$ $(bl)''$ $(cl)''$ mit deren Hülfe man weitere Verbesserungen x_3 y_3 z_3 berechnen kann u. s. f. bis endlich die Normalgleichungen (4) hinreichend erfüllt werden; alsdann ist

$$
\begin{aligned}
x &= x_1 + x_2 + \cdots \\
y &= y_1 + y_2 + \cdots \\
z &= z_1 + z_2 + \cdots
\end{aligned} \tag{7}
$$

Bequem ist es für diese indirecte Auflösung, (4) in die Form

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{(al)}{(aa)} \quad \cdot \quad - \frac{(ab)}{(aa)}y - \frac{(ac)}{(aa)}z \\
y &= \frac{(bl)}{(bb)} - \frac{(ab)}{(aa)}x \quad \cdot \quad - \frac{(bc)}{(bb)}z \\
z &= \frac{(cl)}{(cc)} - \frac{(ac)}{(cc)}x - \frac{(bc)}{(cc)}y \quad \cdot
\end{aligned} \tag{8}
$$

zu bringen, um die wiederkehrenden Divisionen mit (aa) (bb) (cc) zu sparen (Beisp. 27.).

In etwas andrer Weise erfolgt die indirecte Auflösung (nach Gauss) in der Art, dass man nicht gleichzeitig für alle Unbekannten eine Werthreihe bestimmt, sondern immer nur für eine derselben und zwar für diejenige, deren Verbesserung gerade die grösste ist unter der Reihe der Verbesserungen aller Unbekannten an dieser Stelle der Rech-

nung. Zur Erläuterung nehmen wir §. 11. Beisp. 2. Normalgleichungen (13) S. 86:

$$\begin{array}{rrrrrl}
3\xi & -\ \eta & -\ \zeta & . & +\ 0.25 & = 0 \\
-\ \xi & +\ 3\eta & . & -\ \tau & +\ 0.28 & = 0 \\
-\ \xi & . & +\ 3\zeta & -\ \tau & +\ 0.40 & = 0 \\
. & -\ \eta & -\ \zeta & +\ 3\tau & -\ 0.93 & = 0 \\
\hline
\xi & +\ \eta & +\ \zeta & +\ \tau & . & = 0
\end{array}$$

denen wir noch die Summengleichung beigefügt haben. Die ersten Näherungswerthe würden sein nach dem ersten Verfahren

$$\xi_1 = -\ 0.08$$
$$\eta_1 = -\ 0.09$$
$$\zeta_1 = -\ 0.13$$
$$\tau_1 = +\ 0.31.$$

Jetzt aber nehmen wir nur $\tau_1 = +\ 0.31$ und schreiben dies folgendermaassen:

	$\tau_1 = +0.31$	Rest	$\xi_1 = -0.08$	Rest	$\zeta_1 = -0.06$	Rest
+ 0.25	.	+ 0.25	— 0.24	+ 0.01	+ 0.06	+ 0.07
+ 0.28	— 0.31	— 0.03	+ 0.08	+ 0.05	.	+ 0.05
+ 0.40	— 0.31	+ 0.09	+ 0.08	+ 0.17	— 0.18	— 0.01
— 0.93	+ 0.93	0.00	.	0.00	+ 0.06	+ 0.06
0	+ 0.31	+ 0.31	— 0.08	+ 0.23	— 0.06	+ 0.17

wozu eine Fortsetzung beigefügt ist für einen Näherungswerth von ξ und einen solchen von ζ. Jetzt würde die grösste Verbesserung sich für ξ ergeben und zwar zu — 0.02, da indessen der erste Näherungswerth von ξ auch negativ war, so schliessen wir, dass — 0.02 als Verbesserung von ξ nicht genügen wird und nehmen daher — 0.04 um einer weitern negativen Verbesserung von ξ vorzubeugen. In dieser Art wird die Rechnung:

Rest	$\xi_2 = -0.04$	Rest	$\eta_1 = -0.03$	Rest
+ 0.07	— 0.12	— 0.05	+ 0.03	— 0.02
+ 0.05	+ 0.04	+ 0.09	— 0.09	0.00
— 0.01	+ 0.04	+ 0.03	.	+ 0.03
+ 0.06	.	+ 0.06	+ 0.03	+ 0.09
+ 0.17	— 0.04	+ 0.13	— 0.03	+ 0.10

$\tau_2 = -0.05$	Rest	$\xi_2 = -0.03$	Rest
.	— 0.02	+ 0.03	+ 0.01
+ 0.05	+ 0.05	.	+ 0.05
+ 0.05	+ 0.08	— 0.09	— 0.01
— 0.15	— 0.06	+ 0.03	— 0.03
— 0.05	+ 0.05	— 0.03	+ 0.02

$\eta_2 = -0.02$	Rest	$\xi_3 = -0.01$	Rest	$\tau_3 = +0.003$	Rest
+ 0.02	+ 0.03	— 0.03	0.00	.	0.000
— 0.06	— 0.01	+ 0.01	0.00	— 0.003	— 0.003
.	— 0.01	+ 0.01	0.00	— 0.003	— 0.003
+ 0.02	— 0.01	.	— 0.01	+ 0.009	— 0.001
— 0.02	0.00	— 0.01	— 0.01	+ 0.003	— 0.007

Wir begnügen uns, die Normalgleichungen auf 2 Decimalen erfüllt zu haben. Es wird im Ganzen für

ξ	η	ζ	τ
— 0.08	— 0.03	— 0.06	+ 0.31
— 0.04	— 0.02	— 0.03	— 0.05
— 0.01			+ 0.003
— 0.13	— 0.05	— 0.09	+ 0.263

während wir §. 11. fanden

— 0.129 — 0.048 — 0.088 + 0.265

Eine Untersuchung über die Frage, ob diese Näherungsverfahren immer zur Auflösung führen, hat für uns wenig

Bedeutung vom praktischen Standpunkte aus, da der Rechnungsgang in jedem Augenblicke angiebt, in wieweit die Normalgleichungen erfüllt sind und wir somit nie in die Lage kommen können, erheblich fehlerhafte Werthe der Unbekannten für die strengen zu halten. Aber es ist leicht zu zeigen, dass obige Verfahren zu immer grösserer Annäherung führen. Sind nämlich $x' y' z'$ irgend welche Annahmen für $x y z$ und berechnet man die zu ersterem Werthsystem gehörenden λ' sowie $(\lambda'\lambda')$, so ist $x' y' z'$ ein System von Näherungswerthen, wenn $(\lambda'\lambda') < (ll)$ und um so schärfer, je kleiner $(\lambda'\lambda')$ ist. Verbessern wir nun beispielsweise x' um

$$(9) \qquad x'' = \frac{1}{(aa)}\{(al) - (aa)x' - (ab)y' - (ac)z'\} = -\frac{(a\lambda')}{(aa)}$$

so ergeben sich mit den Näherungswerthen $x' + x''$, y', z' neue Verbesserungen λ'', wo allgemein

$$\lambda'' = \lambda' + ax''.$$

Daher wird

$(\lambda''\lambda'') = (\lambda'\lambda') + 2(a\lambda')x'' + (aa)x''^2$ d.i. aber $(\lambda'\lambda') - (aa)x''^2$ und es ist also

$$(10) \qquad (\lambda''\lambda'') < (\lambda'\lambda')$$

d. h. das Werthsystem $x' + x''$, y', z' bietet eine grössere Annäherung als das vorhergehende $x' y' z'$. Zugleich erkennt man, dass bei Anwendung des zweiten Verfahrens durch Verbesserung derjenigen Unbekannten die grösste Verminderung der Fehlerquadratsumme erzielt wird, für welche das Quadrat der Verbesserung multiplicirt mit dem resp. quadratischen Coefficienten am grössten ist.

III. Bei der Entwicklung der Normalgleichungen aus den Fehlergleichungen bedient man sich oft mit Vortheil der Quadrattafeln, die nicht nur die Berechnung der quadratischen Coefficienten gestatten, sondern auch die aller andern. Man hat z. B. für $[ab]$

$$ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2} = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$$

daher entweder

$$(11) \qquad [ab] = \frac{[(a+b)(a+b)] - [aa] - [bb]}{2}$$

oder

$$(11^*) \qquad [ab] = \frac{[(a+b)(a+b)] - [(a-b)(a-b)]}{4}.$$

Die erste Formel ist die bequemere, da sie nur die Neuberechnung einer Quadratsumme erfordert.

Die Rechenmaschine von Thomas gewährt in weitaus den meisten Fällen für Aufstellung und Auflösung der Normalgleichungen überraschende Bequemlichkeit, namentlich im Hinblicke auf die alsdann leicht ausführbare stete Controlle durch die Summengleichungen.

Muss man mit Logarithmen rechnen, so sind Gauss'sche Logarithmen in der Regel vortheilhaft.

§. 19.

Mittlerer Fehler einer Function von Grössen, welche durch vermittelnde Beobachtungen gefunden worden sind.

I. Ist der mittlere Fehler in der Bestimmung der Function

$$(1) \qquad F(XYZT)$$

zu suchen, wenn man für $XYZT$, als den wahren Werthen der durch vermittelnde Beobachtungen gleich $x\,y\,z\,t$ bestimmten Unbekannten, diese letztern Werthe setzt, also

$$(2) \qquad F(x\,y\,z\,t)$$

als Functionswerth annimmt, so müssen in diesen Ausdruck erst die Beobachtungswerthe l eingeführt werden, denn nur diese sind unabhängig von einander, nicht aber die berechneten Werthe $x\,y\,z\,t$. Ist einmal die Function F als Function der l dargestellt, so giebt uns §. 6. den mittlern Fehler von F. In Formel (12) daselbst kommen nun nur die Differentialquotienten von F nach den l vor; es genügt daher, anstatt die l selbst in F einzuführen, nur die genannten Derivirten zu entwickeln.

Wir haben nun nach frühern Formeln (wobei wir uns auf 4 Unbekannte und 5 Beobachtungswerthe beschränken):

$$(3) \qquad \begin{aligned} x &= \alpha_1 l_1' + \alpha_2 l_2' + \alpha_3 l_3' + \alpha_4 l_4' + \alpha_5 l_5' \\ y &= \beta_1 l_1' + \beta_2 l_2' + \beta_3 l_3' + \beta_4 l_4' + \beta_5 l_5' \\ z &= \gamma_1 l_1' + \gamma_2 l_2' + \gamma_3 l_3' + \gamma_4 l_4' + \gamma_5 l_5' \\ t &= \delta_1 l_1' + \delta_2 l_2' + \delta_3 l_3' + \delta_4 l_4' + \delta_5 l_5' \end{aligned}$$

worin die l' fingirte Beobachtungswerthe vom Gewicht 1 bedeuten:

$$l_1' = l_1\sqrt{g_1} \quad l_2' = l_2\sqrt{g_2} \ldots l_5' = l_5\sqrt{g_5}$$

und die l die wirklichen Beobachtungswerthe mit den respectiven Gewichten g sind (§. 16. (2)).

Es ist ferner für die Aenderung von F nach l,

$$\frac{dF}{dl_1} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial l_1} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial l_1} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial l_1} + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial l_1}$$

daher, wenn wir zur Abkürzung setzen

$$(4) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = F_1 \quad \frac{\partial F}{\partial y} = F_2 \quad \frac{\partial F}{\partial z} = F_3 \quad \frac{\partial F}{\partial t} = F_4$$

mit Hülfe der aus den Gl. (3) zu entnehmenden Differentialquotienten von $x\ y\ z\ t$ nach l_1

$$(5) \qquad \frac{dF_1}{dl_1} = (\alpha_1 F_1 + \beta_1 F_2 + \gamma_1 F_3 + \delta_1 F_4)\sqrt{g_1}.$$

Ebenso würde sich finden

$$(6) \qquad \frac{dF}{dl_2} = (\alpha_2 F_1 + \beta_2 F_2 + \gamma_2 F_3 + \delta_2 F_4)\sqrt{g_2}$$

$$(7) \qquad \frac{dF}{dl_3} = (\alpha_3 F_1 + \beta_3 F_2 + \gamma_3 F_3 + \delta_3 F_4)\sqrt{g_3}$$

$$(8) \qquad \frac{dF}{dl_4} = (\alpha_4 F_1 + \beta_4 F_2 + \gamma_4 F_3 + \delta_4 F_4)\sqrt{g_4}$$

$$(9) \qquad \frac{dF}{dl_5} = (\alpha_5 F_1 + \beta_5 F_2 + \gamma_5 F_3 + \delta_5 F_4)\sqrt{g_5}.$$

Da man nun hat

$$\mu_F^2 = \left(\frac{dF}{dl_1}\right)^2 \mu_1^2 + \left(\frac{dF}{dl_2}\right)^2 \mu_2^2 + \left(\frac{dF}{dl_3}\right)^2 \mu_3^2 + \left(\frac{dF}{dl_4}\right)^2 \mu_4^2 + \left(\frac{dF}{dl_5}\right)^2 \mu_5^2$$

worin $\mu_1 \ldots \mu_5$ die mittlern Fehler von $l_1 \ldots l_5$ bezeichnen, so kann durch Substitution der Gl. (5 ... 9) sofort μ_F^2 gefunden werden.

Wir führen hierbei noch anstatt der verschiedenen μ^2 die Gewichte g ein und setzen wie früher, wenn μ ohne Index mittlerer Fehler der Beobachtungen von dem Gewichte 1 ist,

$$(10)\qquad \begin{aligned} \mu_1^2 &= \mu^2 : g_1 \\ \mu_2^2 &= \mu^2 : g_2 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \mu_5^2 &= \mu^2 : g_5 \end{aligned}$$

und erhalten durch eine leichte Rechnung

$$\mu_F^2 = \left\{ \begin{array}{l} [\alpha\alpha]F_1^2 + 2[\alpha\beta]F_1F_2 + 2[\alpha\gamma]F_1F_3 + 2[\alpha\delta]F_1F_4 \\ \qquad + [\beta\beta]F_2^2 + 2[\beta\gamma]F_2F_3 + 2[\beta\delta]F_2F_4 \\ \qquad\qquad + [\gamma\gamma]F_3^2 + 2[\gamma\delta]F_3F_4 \\ \qquad\qquad\qquad + [\delta\delta]F_4^2 \end{array} \right\} \mu^2$$

oder nach §. 11. mit Einführung der Hülfsgrössen Q:

$$(11)\quad \mu_F^2 = \left\{ \begin{array}{l} F_1^2 Q_{1.1} + 2F_1F_2Q_{1.2} + 2F_1F_3Q_{1.3} + 2F_1F_4Q_{1.4} \\ \qquad + F_2^2 Q_{2.2} + 2F_2F_3Q_{2.3} + 2F_2F_4Q_{2.4} \\ \qquad\qquad + F_3^2 Q_{3.3} + 2F_3F_4Q_{3.4} \\ \qquad\qquad\qquad + F_4^2 Q_{4.4} \end{array} \right\} \mu^2$$

Diese Formel ist oft recht bequem. Für manche Zwecke ist es aber noch bequemer, ihr nachfolgende Gestalt zu geben.

Wir führen zu dem Zwecke die Gl. (57 bis 60) des §. 13. ein, um nämlich die Hülfsgrössen Q zu eliminiren und ziehen die Grössen mit gleichen Nennern zusammen. Wir erhalten damit nach einfacher Reduction:

$$\mu_F^2 = \mu^2 \left\{ \frac{F_1^2}{(aa)} + \frac{(F_2 - \alpha_1' F_1)^2}{(bb.1)} + \frac{(F_3 - \beta_2' F_2 - \alpha_2' F_1)^2}{(cc.2)} + \frac{(F_4 - \gamma_3' F_3 - \beta_3' F_2 - \alpha_3' F_1)^2}{(dd.3)} \right\}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$(12)\qquad \begin{aligned} (F_2.1) &= F_2 - \alpha_1' F_1 \\ (F_3.2) &= F_3 - \beta_2' F_2 - \alpha_2' F_1 \\ (F_4.3) &= F_4 - \gamma_3' F_3 - \beta_3' F_2 - \alpha_3' F_1 \end{aligned}$$

so wird

$$(13)\qquad \mu_F^2 = \mu^2 \left\{ \frac{F_1^2}{(aa)} + \frac{(F_2.1)^2}{(bb.1)} + \frac{(F_3.2)^2}{(cc.2)} + \frac{(F_4.3)^2}{(dd.3)} \right\}$$

Wir führen nun die Werthe für α_2' α_3' β_3' nach Gl. (51. 52. 54.) §. 13. in (12) ein und erhalten:

$$(14)\qquad \begin{aligned} (F_2.1) &= F_2 - \alpha_1' F_1 \\ (F_3.2) &= F_3 - \beta_2' (F_2.1) - \beta_1' F_1 \\ (F_4.3) &= F_4 - \gamma_3' (F_3.2) - \gamma_2' (F_2.1) - \gamma_1' F_1 \end{aligned}$$

Betrachten wir andrerseits das Schema

(15)

(aa)	(ab)	(ac)	(ad)	F_1
(ab)	(bb)	(bc)	(bd)	F_2
(ac)	(bc)	(cc)	(cd)	F_3
(ad)	(bd)	(cd)	(dd)	F_4

welches sich an das Normalgleichungssystem eng anschliesst und behandeln dasselbe mit Benutzung der Auflösung des letztern nach dem Gauss'schen Algorithmus, so ergiebt sich entsprechend Schema (V) §. 17.:

(16)

(aa)	(ab)	(ac)	(ad)	F_1
	$(bb.1)$	$(bc.1)$	$(bd.1)$	$(F_2.1)$
		$(cc.2)$	$(cd.2)$	$(F_3.2)$
			$(dd.3)$	$(F_4.3)$

wobei bedeuten

$$(17)\quad \begin{cases} (F_2.1) = F_2 - \frac{F_1}{(aa)}(ab) \\ (F_3.2) = F_3 - \frac{F_1}{(aa)}(ac) - \frac{(F_2.1)}{(b\,b.1)}(bc.1) \\ (F_4.3) = F_4 - \frac{F_1}{(aa)}(ad) - \frac{(F_2.1)}{(b\,b.1)}(bd.1) - \frac{(F_3.2)}{(cc.2)}(cd.2) \end{cases}$$

oder mit Rücksicht auf §. 13. (48. 49) behufs Einführung der daselbst angegebenen Hülfsgrössen:

$$(18)\quad \begin{aligned} (F_2.1) &= F_2 - \alpha_1' F_1 \\ (F_3.2) &= F_3 - \beta_2'(F_2.1) - \beta_1' F_1 \\ (F_4.3) &= F_4 - \gamma_3'(F_3.2) - \gamma_2'(F_2.1) - \gamma_1' F_1. \end{aligned}$$

Es sind hiernach die Glieder der rechtsliegenden Verticalreihe in (16) nichts Anderes als die gleichnamigen linken Seiten des Systems (14) oder die Zähler der Formel (13). Diese werden also entweder mittelst (15. 16) berechnet oder

mittelst (14) oder mittelst (12). Im ersteren Falle hängt man die Verticalcolonne rechts in (15) einfach dem Normalgleichungssysteme an, kann auch die Richtigkeit der weitern Rechnung analog den Summennormalgleichungen durch Summenbildung controlliren.

Beispiel 2*. (Fortsetzung zu §. 17. S. 131.)

Der ausgeglichene Werth des Winkels NH ist $11^0\,44'\,11''.057 = y - x$, es ist das Gewicht resp. der mittlere Fehler dieser Bestimmung zu ermitteln.

Wir haben nach Formel (11) d. §. für 2 Unbekannte

$$(24)\qquad \begin{aligned} \mu_{(NH)}^2 &= \mu^2(Q_{1.1} - 2Q_{1.2} + Q_{2.2}) \\ &= 4.2738\ (0.00978 - 0.00750 + 0.01890) \\ &= 4.2738 \times 0.02118 \end{aligned}$$

mithin

$$(25)\qquad \begin{cases} \mu_{(NH)} = \mp 0.''301 \\ \text{Gewicht} = \frac{1}{0.02118}, \text{ entspricht 47 Repetitionen.} \end{cases}$$

Vor der Ausgleichung war die Repetitionszahl und das Gewicht nur 20.

Rechnen wir nach (13) und (14) d. §. so wird

$$(26)\qquad \begin{cases} F_1 = -1 \quad F_2 = +1 \quad F_3 = 0 \quad F_4 = 0 \\ (F_2.1) = +1 - 0.1667 = 0.8333 \\ (F_3.2) = +0.11765 \times 0.8333 - 0.33333 = -0.2353 \\ (F_4.3) = -0.38924 \times 0.2353 + 0.35294 \times 0.8333 = +0.2025 \end{cases}$$

und das reciproke Gewicht für NH:

$$Q_{(HN)} = 0.00833 + \frac{0.8333^2}{56.6667} + \frac{0.2353^2}{185.8824} + \frac{0.2025^2}{134.7785}$$

oder übereinstimmend mit (25)

$$Q_{(NH)} = 0.00833 + 0.01226 + 0.00030 + 0.00030 = 0.02119.$$

Würde man anstatt die Formeln (14) anzuwenden den Normalgleichungen (2) des Beispiels die Verticalreihe (2) — vergl. das Tableau auf nächster Seite — anhängen, so würden für die abgeleiteten Systeme (3. 4. 5) die Verticalreihen (3) (4) (5) resp. sich ergeben:

(27)

(2)	(3)	(4)	(5)
— 1			
— 0.00833			
+ 1	+ 0.8333		
.	+ 0.01471		
.	— 0.3333	— 0.2354	
.	.	— 0.00127	
.	.	+ 0.2942	+ 0.2026
.	.	.	+ 0.00150
0	+ 0.5000	+ 0.0587	+ 0.2024

und es würde darnach, wobei auf Vorzeichen nicht Rücksicht zu nehmen ist,

(28) $$Q_{(NH)} = 1 \times 0.00833 + 0.8333 \times 0.01471 + 0.2354 \times 0.00127 + 0.2026 \times 0.00150$$

womit sich wieder der bereits gefundene Werth ergiebt.

Wollte man sich endlich der Formeln (12) bedienen, so würde

(29)
$$\begin{aligned} F_1 &= -1 \\ (F_2.1) &= +1 - 0.1667 = 0.8333 \\ (F_3.2) &= +0.1176 - 0.3530 = -0.2354 \\ (F_4.3) &= +0.3988 - 0.1962 = +0.2026 \end{aligned}$$

u. s. w.

und ohne Zweifel geben in dem speciellen Falle unseres Beispiels, weil F_1 und F_2 so einfache Factoren sind, die Formeln (12) die einfachste Rechnung für $Q_{(NH)}$, falls man wegen Unkenntniss von $Q_{1.2}$ nicht nach (11) rechnen kann.

II. Hat man den mittlern Fehler μ_F einer Function F der Unbekannten und andrer Beobachtungsgrössen, welche nicht in die Ausgleichung eingingen, zu bestimmen, so ist leicht ersichtlich, dass μ_F^2 sich einfach durch Addition zusammensetzt aus den Quadraten des mittlern Fehlers in F wegen Unsicherheit der Unbekannten allein, sowie des m. F. in F

wegen Unsicherheit der hinzukommenden Beobachtungsgrössen.

Beispiel 8. (Forts. §. 9. S. 72.) Wenden wir die Formel (15) daselbst an auf die Berechnung einer Distanz und ist der m. Fehler in der Ablesung a gleich μ_a, so wird das m. Fehlerquadrat in der berechneten Distanz d. i. der Function

(15) $$F = 0.335 + 99.26\,a,$$ gleich

(16) $$\mu_F^2 = a^2\mu_x^2 + (99.26)^2\mu_a^2.$$

Es ist nämlich der m. F. in 0.335 verschwindend klein, ferner der m. F. in $99.26\,a$ wegen Unsicherheit der Constanten 99.26 (d. i. x) gleich $a\mu_x$ und endlich der m. F. in $99.26\,a$ wegen Unsicherheit des behufs Distanzmessung beobachteten a gleich $99.26\,\mu_a$.

Setzen wir $\mu_x^2 = 0.0017$ und $\mu_a^2 = 0.000004\,a^2$ (vergl. die Bemerkung S. 72 oben) so wird

(17) $$\mu_F^2 = a^2\{0.0017 + 0.04\}$$

es ist hiernach der mittlere Fehler der Distanzmessung hauptsächlich abhängig von dem Fehler in der Ablesungsdifferenz, dagegen nur wenig von der Unsicherheit der Constanten 99.26, wie es auch so sein muss für eine genügende Bestimmung derselben.

Beobachtet man a nicht ein Mal sondern n Male und nimmt das Mittel zur Berechnung der Distanz, so wird

$$\mu_F^2 = a^2\left\{0.0017 + \frac{0.04}{n}\right\}.$$

§. 20.

Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen, denen ein Fehlergleichungssystem der nachfolgenden Form (1) entspricht:

(1)
$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 - \lambda_0 = -l_1 + a_1x + b_1y \\ \lambda_2 - \lambda_0 = -l_2 + a_2x + b_2y \\ \lambda_3 - \lambda_0 = -l_3 + a_3x + b_3y \end{array}\right| \begin{array}{l}(m)\\ \\ \\ \hline (n)\end{array}$$

Sind die Gewichte von $\lambda_0\,\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3\ldots$ resp. $g_0\,g_1\,g_2\,g_3\ldots$, so kann man aus der Summe $[\lambda\lambda g]$ immer nur n der λ eliminiren; eines derselben bleibt darin und wir müssen es nächst $x\,y\ldots$ als Variable bei der Differentiation von $[\lambda\lambda g]$ betrachten. Nehmen wir λ_0 zu diesem besondern λ, so

schreiben wir, um auf die frühere Form der Fehlergleichungen zu kommen (wobei wir uns auf $n = 3$ $m = 2$ beschränken):

$$(2)\qquad \begin{array}{l|l} \lambda_0 = \quad . \quad \lambda_0 & g_0 \\ \lambda_1 = -l_1 + \lambda_0 + a_1 x + b_1 y & g_1 \\ \lambda_2 = -l_2 + \lambda_0 + a_2 x + b_2 y & g_2 \\ \lambda_3 = -l_3 + \lambda_0 + a_3 x + b_3 y & g_3 \end{array}$$

Hierzu gehören die Normalgleichungen

$$(3)\qquad \begin{array}{l} [g]\,\lambda_0 + [ag]\,x + [bg]\,y = [lg] \\ [ag]\lambda_0 + [aag]x + [abg]y = [alg] \\ [bg]\lambda_0 + [abg]x + [bbg]\,y = [blg] \end{array}$$

Diese lösen wir aber nicht auf, sondern wir formen das Problem um, sodass eine bequemere Lösung erzielt wird.

I. Umformung. Wir setzen in (2)

$$(4)\qquad \lambda_0 = -l_0' + u$$

worin l_0' ein noch beliebiger Hülfswerth ist und erhalten damit

$$(5)\qquad \begin{array}{l|l} \lambda_0 = -l_0' + u & l_0' = \quad . \quad l_0' \\ \lambda_1 = -l_1' + u + a_1 x + b_1 y & l_1' = l_1 + l_0' \\ \lambda_2 = -l_2' + u + a_2 x + b_2 y & l_2' = l_2 + l_0' \\ \lambda_3 = -l_3' + u + a_3 x + b_3 y & l_3' = l_3 + l_0' \end{array}$$

Die Normalgleichungen nehmen wieder die Form (3) an, nur steht für $l \ldots l'$ und für $\lambda_0 \ldots u$.

Für diese Normalgleichungen wird die Auflösung erleichtert, indem man $[l'g]$ zu Null macht. Es muss also l_0' so gewählt werden, dass diese Bedingung erfüllt ist, d. h. es ist zu setzen:

$$(6)\qquad l_0' = -\frac{[lg]}{[g]}.$$

Insbesondere ist für $g_0 = g_1 = g_2 = \ldots = 1$

$$(6^*)\qquad l_0' = -\frac{[l]}{n+1}.$$

Die Gleichungen (3) gehen über in

$$(7)\qquad \begin{array}{l} [g]\,u + [ag]\,x + [bg]\,y = \quad 0 \\ [ag]u + [aag]x + [abg]y = [al'g] \\ [bg]u + [abg]x + [bbg]\,y = [bl'g] \end{array}$$

und insbesondere für $g_0 = g_1 = g_2 = \ldots = 1$ in

$$(7^*) \qquad \begin{aligned} (n+1)u + [a]\,x + [b]\,y &= 0 \\ [a]\;u + [aa]x + [ab]y &= [al'] \\ [b]\;u + [ab]x + [bb]y &= [bl'] \end{aligned}$$

Diese Normalgleichungen werden in gewöhnlicher Weise aufgelöst. Wir erinnern noch daran, dass die erste der Gl. (3) bedeutet, dass

$$(8) \qquad [\lambda g] = 0$$

werden soll, welche Formel für gleiche Gewichte übergeht in:

$$(8^*) \qquad [\lambda] = 0.$$

Diese Formeln geben eine (theilweise) Rechnungscontrolle (§. 14. III).

Man hat ferner (§. 14. II) zur Berechnung von $[\lambda\lambda g]$ im Anschluss an (5) und (7) $[l'l'g]$ zu bilden; es ist aber behufs vollständigerer Controlle gut, $[l'l'g]$ auch direct aus $[llg]$ zu berechnen und man findet leicht aus (5) durch Quadriren der Relationen zwischen den l und l' mit Rücksicht auf (6)

$$(9) \qquad [l'l'g] = [llg] - \frac{[lg]^2}{[g]} = [llg] - l_0'^2[g].$$

Vorstehendes Verfahren zur Auflösung von (1) nach der M. der kl. Qu. ist zweckmässig, wenn in keiner der Fehlergleichungen alle Unbekannten vorkommen (Beisp. 9).

II. Umformung. Kommen in den meisten der Fehlergleichungen (1) alle Unbekannte vor, so setze man anstatt (4) besser

$$(10) \qquad \lambda_0 = -l_0' + u + a_0'x + b_0'y$$

worin $l_0'\ a_0'\ b_0'$ noch beliebig sind. Damit geht (2) über in

$$(11) \qquad \left\{\begin{array}{l|l|l|l} \lambda_0 = -l_0' + u + a_0'x + b_0'y & g_0 \\ \lambda_1 = -l_1' + u + a_1'x + b_1'y & g_1 \\ \lambda_2 = -l_2' + u + a_2'x + b_2'y & g_2 \\ \lambda_3 = -l_3' + u + a_3'x + b_3'y & g_3 \\ l_0' = . \quad l_0' & a_0' = . \quad a_0' & b_0' = . \quad b_0' \\ l_1' = l_1 + l_0' & a_1' = a_1 + a_0' & b_1' = b_1 + b_0' \\ l_2' = l_2 + l_0' & a_2' = a_2 + a_0' & b_2' = b_2 + b_0' \\ l_3' = l_3 + l_0' & a_3' = a_3 + a_0' & b_3' = b_3 + b_0' \end{array}\right.$$

und die Normalgleichungen erhalten die Form (3); nur ist daselbst für $l\ a\ b$ resp. $l'\ a'\ b'$ zu setzen. Wir wählen nun $l_0'\ a_0'\ b_0'$ so, dass

$$[a'g] = 0 \quad [b'g] = 0 \quad [l'g] = 0$$

werden. Man muss daher nehmen:

$$(12) \qquad l_0' = -\frac{[lg]}{[g]} \quad a_0' = -\frac{[ag]}{[g]} \quad b_0' = -\frac{[bg]}{[g]}$$

und die Normalgleichungen werden nun

$$\begin{aligned} [g]\,u \quad . \quad . \quad &= 0 \\ (13) \qquad . \quad [a'a'g]x + [a'b'g]y &= [a'l'g] \\ . \quad [a'b'g]x + [b'b'g]y &= [b'l'g] \end{aligned}$$

so dass der Werth von $u =$ Null wird. (Vergl. Beisp. 10.)

Die Controll-Gleichungen (8) und (9) gelten selbstredend auch jetzt noch.

Löst man das System (3) auf, indem man zunächst λ_0 eliminirt, so erhält man vollständig das System (13), von dessen erster Gleichung, die $u = 0$ ergiebt, abgesehen. Der Vortheil der 2. Umformung liegt nicht gerade darin, die Elimination von λ_0 zu ersparen, denn man hat anstatt dessen die (11) zu berechnen, sondern darin, dass die Coefficienten $a'\ b'$ und auch die l' in der Regel kleiner sind, als die $a\ b\ l$ und daher die Ermittlung der Summen für die (13) bequemer ist, als für die (3). Kaum der Erwähnung bedarf es, dass man durch geeignete Wahl der Näherungswerthe der Unbekannten schon in (1) nur kleine l erhalten haben wird.

Beispiel 9. Auf einer Station eines trigonometrischen Netzes wurden mit einem grossen Universale folgende Richtungsbeobachtungen erhalten:

(1) Tableau der Beobachtungsreihen:

	Nummern der beobachteten Objecte					Mittel aus
	1	2	3	4	5	
1	0°0′0″	51°33′12″.60	50°42′17″.94	243°29′40″.56	251°48′ 2″.04	8 Reihen
2	0″	.	19″.33	41″.54	2″.31	15 „
3	0″	14″.94	.	.	2″.80	2 „
4	0″	10″.65	.	39.″44	.	1 „
5	.	15″.71	20″.00	.	.	1 „
6	.	.	20″.00	.	5″.55	1 „

Da in der 5. und 6. Reihe das Object 1 nicht vorkommt, konnten die Angaben dieser Reihen nicht auf die Form der vorhergehenden gebracht werden; anstatt indessen nun die Angabe für eins der andern Objecte auf Null zu bringen, war es vortheilhafter, allen ursprünglichen Angaben einer dieser Reihen einen solchen Werth zuzufügen, dass alle Angaben für ein und dasselbe Object in den verschiedenen Reihen nahezu gleich wurden.

Die Gewichte dieser Angaben sind durch die Zahlen 8. 15. 2. 1. 1. 1 der letzten Verticalcolonne gegeben, wenn man eine Richtungsangabe einer einfach beobachteten Reihe als Gewichtseinheit annimmt.

Als Unbekannte betrachten wir die Winkel

$$(2)\quad \begin{aligned} (1.2) &= 51^0\,33'\,10''.00 + x \\ (1.3) &= 50^0\,42'\,10''.00 + y \\ (1.4) &= 243^0\,29'\,30''.00 + z \\ (1.5) &= 251^0\,48'\,0''.00 + t \end{aligned}$$

welche wir gleich in der Form „Näherungswerth + plausibelste Verbesserung" angesetzt haben.

Winkel (1.2) ist in Berücksichtigung des Umstandes vorangestellt worden, dass Object 2 in die Ausgleichung des ganzen Netzes nicht eingeht.

Die Ausgleichung des Tableau (1) für sich heisst Horizontabschluss oder Stationsausgleichung.

Die Fehlergleichungen werden in der ursprünglichen Form

(3) Gew. 8

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_1 \\ \lambda_2 &= -\ 2.60 + \lambda_1 + x \\ \lambda_3 &= -\ 7.94 + \lambda_1 + y \\ \lambda_4 &= -\ 10.56 + \lambda_1 + z \\ \lambda_5 &= -\ 2.04 + \lambda_1 + t \end{aligned}$$

(4) Gew. 15

$$\begin{aligned} \lambda_1' &= \lambda_1' \\ \lambda_2' &\text{ fehlt} \\ \lambda_3' &= -\ 9.33 + \lambda_1' + y \\ \lambda_4' &= -\ 11.54 + \lambda_1' + z \\ \lambda_5' &= -\ 2.31 + \lambda_1' + t \end{aligned}$$

(5) Gew. 2

$$\begin{aligned} \lambda_1'' &= \lambda_1'' \\ \lambda_2'' &= -\ 4.94 + \lambda_1'' + x \\ \lambda_3'' &\text{ fehlt} \\ \lambda_4'' &\text{ fehlt} \\ \lambda_5'' &= -\ 2.80 + \lambda_1'' + t \end{aligned}$$

(6) Gew. 1

$$\begin{aligned} \lambda_1''' &= \lambda_1''' \\ \lambda_2''' &= -\ 0.65 + \lambda_1''' + x \\ \lambda_3''' &\text{ fehlt} \\ \lambda_4''' &= -\ 9.44 + \lambda_1''' + z \\ \lambda_5''' &\text{ fehlt} \end{aligned}$$

(7) Gew. 1	(8) Gew. 1
λ_1'''' fehlt	λ_1'''' fehlt
$\lambda_2'''' = -\ 5.71 + \lambda_1'''' + x$	λ_2'''' fehlt
$\lambda_3'''' = -\ 10.00 + \lambda_1'''' + y$	$\lambda_3'''' = -\ 10.00 + \lambda_1'''' + y$
λ_4'''' fehlt	λ_4'''' fehlt
λ_5'''' fehlt	$\lambda_5'''' = -\ 5.55 + \lambda_1'''' + t$

Die Näherungswerthe (2) sind so angenommen worden, dass alle l der Fehlergleichungen positiv werden mussten, um Vorzeichenfehler zu umgehen. Ferner sind (7) und (8) so gebildet, als wäre auch Object 1 beobachtet; in der That kann man sich vorstellen, dass Object 1 mit dem Gewicht Null beobachtet worden sei.

Wir formen nun die Fehlergleichungen um nach dem ersten Verfahren d. §., nur ist jetzt zu berücksichtigen, dass die Gesammtheit aller Fehlergleichungen in 6 Systeme zerfällt, die jedes für sich umzuformen sind mit den resp. Werthen (vergl. Formel (6)):

$$\frac{-23.14}{5} \quad \frac{-23.18}{4} \quad \frac{-7.74}{3} \quad \frac{-10.09}{3} \quad \frac{-15.71}{2} \quad \frac{-15.55}{2}$$

oder

$$-4.628 \quad -5.795 \quad -2.580 \quad -3.363 \quad -7.855 \quad -7.775.$$

Damit ergeben sich die umgeformten Fehlergleichungssysteme wie folgt:

(3*) Gew. 8	(4*) Gew. 15
$\lambda_1 = +\ 4.628 + u$.	$\lambda_1' = +\ 5.795 + u'$.
$\lambda_2 = +\ 2.028 + u + x$	λ_2' fehlt
$\lambda_3 = -\ 3.312 + u + y$	$\lambda_3' = -\ 3.535 + u' + y$
$\lambda_4 = -\ 5.932 + u + z$.	$\lambda_4' = -\ 5.745 + u' + z$
$\lambda_5 = +\ 2.588 + u + t$	$\lambda_5' = +\ 3.485 + u' + t$
(5*) Gew. 2	**(6*) Gew. 1**
$\lambda_1'' = +\ 2.580 + u''$.	$\lambda_1''' = +\ 3.363 + u'''$.
$\lambda_2'' = -\ 2.360 + u'' + x$	$\lambda_2''' = +\ 2.713 + u''' + x$
λ_3'' fehlt	λ_3''' fehlt
λ_4'' fehlt	$\lambda_4''' = -\ 6.077 + u''' + z$
$\lambda_5'' = -\ 0.220 + u'' + t$	λ_5''' fehlt

(7*) Gew. 1

$\lambda_1'''' = \text{fehlt}$
$\lambda_2'''' = +2.145 + u'''' + x$
$\lambda_3'''' = -2.145 + u'''' + y$
$\lambda_4'''' = \text{fehlt}$
$\lambda_5'''' = \text{fehlt}$

(8*) Gew. 1

$\lambda_1''''' = \text{fehlt}$
$\lambda_2''''' = \text{fehlt}$
$\lambda_3''''' = -2.225 + u''''' + y$
$\lambda_4''''' = \text{fehlt}$
$\lambda_5''''' = +2.225 + u''''' + t$

Wir erhalten hiermit:

(9) Tableau der Normalgleichungen:

u	u'	u''	u'''	u''''	u'''''	x	y	z	t	
5×8	.	.	.	.	.	8	8	8	8	.
.	4×15	.	.	.	.	.	15	15	15	.
.	.	3×2	.	.	.	2	.	.	2	.
.	.	.	3	.	.	1	.	1	.	.
.	.	.	.	2	.	1	1	.	.	.
.	.	.	.	.	2	.	1	.	1	.
8	.	2	1	1	.	12	.	.	.	— 16.362
8	15	.	.	1	1	.	25	.	.	+ 83.891
8	15	.	1	.	.	.	.	24	.	+ 139.708
8	15	2	.	.	1	.	.	.	26	— 74.764
9×8	7×15	5×2	5	4	4	24	50	48	52	+ 132.472

Die Normalgleichungen für $u \ldots u''''$ enthalten jede nur eine dieser Unbekannten; es ist daher sehr leicht mit Hülfe derselben die letzteren aus den vier letzten Normalgleichungen und der Summengleichung zu eliminiren. Es ergeben sich damit Gleichungen zwischen den vier eigentlichen Unbekannten $xyzt$, die man bezeichnen kann als:

(10) Die Normalgleichung im engern Sinne.

x	y	z	t	
8.9000	— 2.1000	— 1.9333	— 2.2667	— 16.362
— 2.1000	+18.6500	— 5.3500	— 5.8500	+ 83.891
— 1.9333	— 5.3500	+18.3167	— 5.3500	+139.708
— 2.2667	— 5.8500	— 5.3500	+19.4833	— 74.764
+ 2.6000	+ 5.3500	+ 5.6833	+ 6.0167	+132.472

Daraus folgen die Tableaux:

(11)

x	y	z	t	
8.9000	— 2.1000	— 1.9333	— 2.2667	— 16.362
	18.1545	— 5.8061	— 6.3848	+ 80.030
		16.0398	— 7.8843	+161.749
			12.7850	+ 28.723

(12)

x	y	z	t	
1	—0.23596	—0.21722	—0.25468	— 1.8384
	1	—0.31982	—0.35169	+ 4.4083
		1	—0.49155	+10.0843
			1	+ 2.2466

Auf die Gewichtsberechnung ist keine Rücksicht genommen, da im vorliegenden Falle das Gewicht der Unbekannten selbst selten Interesse hat. Uebrigens gestatten (11) und (12) die Gewichtsberechnung für beliebige Functionen der Unbekannten nach §. 19. (13. 14.)

Für die Unbekannten folgt nach dem Auflösungsverfahren II in §. 17.

(13) $x=+3.2350$ $y=+8.7767$ $z=+11.1886$ $t=+2.2466$ in vollständiger Erfüllung der Summennormalgleichungen.

Es werden nun nach (13) und (2) die Winkel

(14)
$$\begin{aligned}(1.2) &= 51^0\,33'\,13''.2350\\ (1.3) &= 50^0\,42'\,18''.7767\\ (1.4) &= 243^0\,29'\,41''.1886\\ (1.5) &= 251^0\,48'\,2''.2466\end{aligned}$$

wozu in Folge der Netzausgleichung noch für (1.3) (1.4) (1.5) weitere Verbesserungen sich ergeben werden.

Aus (3...8) folgt $[llg] = 5284.61$ und damit ergiebt sich

$$\begin{aligned}[l'l'g] = 5284.61 &- (4.628)^2 \times 5 \times 8 - (5.795)^2 \times 4 \times 15\\ &- (2.580)^2 \times 3 \times 2 - (3.363)^2 \times 3\\ &- (7.855)^2 \times 2 \quad - (7.775)^2 \times 2\end{aligned}$$

oder $[l'l'g] = 2094.78$. Ferner wird nunmehr

$$\begin{aligned}[\lambda\lambda g] = 2094.78 &- 16.362 \times 1.8384 - 80.030 \times 4.4083\\ &- 161.749 \times 10.0843 - 28.723 \times 2.2466\end{aligned}$$

oder

(15) $$[\lambda\lambda g] = 16.24.$$

Um die λ einzeln kennen zu lernen, müssten wir dem üblichen Rechnungsgange nach zunächst mittelst der ersten sechs Gleichungen des Tabl. (9) die u berechnen, worauf die Gl. (3* . . 8*) die λ geben würden. Indessen verfahren wir zu mehr Controlle lieber wie folgt: Mit den Werthen (14) und Tableau (1) werden gerade so, als ob wir aufs neue die Ausgleichung beginnen wollten, die negativen l der Fehlergleichungen (3...8) gebildet, welche wir wie folgt, tabellarisch zusammenstellen:

(16)

	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	.	
2	+ 0.6350	.	— 1.7050	+ 2.5850	— 2.4750	.
3	+ 0.8367	— 0.5533	.	.	— 1.2233	— 1.2233
4	+ 0.6286	— 0.3514	.	+ 1.7486	.	.
5	+ 0.2066	— 0.0634	— 0.5534	.	.	— 3.3034
Sa.	+ 2.3069	— 0.9681	— 2.2584	+ 4.3336	— 3.6983	— 4.5267
	5	4	3	3	2	2
Quot.	+ 0.4614	— 0.2420	— 0.7528	+ 1.4445	— 1.8491	— 2.2633

Diesem Tableau der negativen l wurden die Summen der Verticalcolonnen und die Anzahlen der Glieder derselben, sowie die Quotienten aus beiden beigefügt. Durch Subtraction der letzteren von den Werthen der resp. Verticalcolonnen folgt sofort:

(17) Tableau der λ:

	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	− 0.4614	+ 0.2420	+ 0.7528	− 1.4445	.	.
2	+ 0.1736	.	− 0.9522	+ 1.1405	− 0.6259	.
3	+ 0.3753	− 0.3113	.	.	+ 0.6258	+ 1.0400
4	+ 0.1672	− 0.1094	.	+ 0.3041	.	.
5	− 0.2548	+ 0.1786	+ 0.1994	.	.	− 1.0401
+	0.7161	0.4206	0.9522	1.4446	0.6258	1.0400
−	0.7162	0.4207	0.9522	1.4445	0.6259	1.0401
	8	15	2	1	1	1

In der That sind hierin die λ enthalten; zunächst sind die Zahlen zwar nur die in (3*...8*) einzuführenden neuen Zahlenwerthe; da aber die neue Ausgleichung keine weitern Verbesserungen der Unbekannten ergeben kann, so sind in diesen Systemen $xyzt$ Null zu setzen. Mit $xyzt$ verschwinden aber auch nach (9) die $u...u''''$; daher sind die Zahlen in (17) die λ selbst.

Die Summenbildung des Tableaus (17) zeigt, dass für jede Reihe $[\lambda] =$ Null ist; jedoch haben diese Relationen nicht die Bedeutung der Controllgl. (8), weil die λ nicht aus den Gl. (3* .. 8*) durch Substitution der Unbekannten gefunden worden sind (§. 14. III).

Die Quadratsumme $[\lambda\lambda g]$ wird nach (17) gleich 16.26 in guter Uebereinstimmung mit (15).

Der mittlere zu befürchtende Beobachtungsfehler einer Richtungsangabe vom Gewicht 1 ist somit, da die Anzahl aller Unbekannten 4+6, die der beobachteten Richtungen 19 beträgt,

$$(18) \qquad \mu = \mp \sqrt{\frac{16.26}{9}} = \mp 1''.34.$$

Der mittlere Fehler eines einer einfachen Reihe entsprechenden Winkels ist $\mu\sqrt{2} = \mp 1''.90$.

Da für jede Beobachtungsreihe alle Instrumentalfehler, ausgenommen der Theilungsfehler, eliminirt sind, der Horizontalkreis aber von Zeit

zu Zeit gedreht wurde, so enthält μ jedenfalls einen Theil der Einwirkung des Theilungsfehlers. Wenn man andrerseits annehmen kann, dass gerade durch die Kreisdrehungen aus den Resultaten der Ausgleichung der Theilungsfehler nahezu eliminirt ist, so muss man erwarten, dass der mittlere zu befürchtende Fehler für die Gewichtseinheit in einem der ausgeglichenen Werthe (14) etwas kleiner als $\mp 1''.34$ sein werde.

Für die praktische Rechnung ist es bequem, nicht ein Tableau (1) herzustellen, sondern die Reihen einzeln zu lassen, jedoch so zu gruppiren, dass diejenigen mit denselben Objecten unter einander stehen. Im übrigen verfährt man wie oben, wird aber bemerken, dass nunmehr bei der Bildung der Normalgleichungen die Multiplication der l' mit ihren g wegfällt. Verschiedene kleine Vortheile bei der Anordnung der Rechnung drängen sich von selbst auf, insbesondere bezüglich tabellarischer Gestaltung derselben. Beispielsweise sei bemerkt, dass man von den Fehlergleichungen nur die Zahlwerthe der l aufschreiben wird und zwar nicht wie in denselben die $-l$, sondern die $+l$, weil sich diese unmittelbar ergeben und für die Normalgleichungen mit diesem Vorzeichen gebraucht werden.

Anderes Verfahren zur Ausgleichung der Richtungsbeobachtungen einer Station. Anstatt der 4 unbekannten Winkelwerthe führt man 5 unbekannte Richtungswerthe (1) (2) ... (5) ein und hat als Beziehungen zwischen den Winkeln und Richtungen

$$\begin{aligned} (19) \qquad (1.2) &= (2) - (1) \quad (1.3) = (3) - (1) \\ (1.4) &= (4) - (1) \quad (1.5) = (5) - (1). \end{aligned}$$

Da jedoch nur die Winkel bestimmte Werthe haben, so ist einer der Richtungswerthe beliebig. Sehen wir indess einstweilen davon ab und bilden die Fehlergleichungen, wobei es genügt, eine Beobachtungsreihe zu betrachten. Für die erste Reihe in (1) haben wir

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \qquad\qquad\qquad\quad \lambda_1 \\ \lambda_2 &= -\ 51^0\,33'\,12''.60 + \lambda_1 - (1) + (2) \\ (20) \qquad \lambda_3 &= -\ 50^0\,42'\,17''.94 + \lambda_1 - (1) + (3) \\ \lambda_4 &= -\ 243^0\,29'\,40''.56 + \lambda_1 - (1) + (4) \\ \lambda_5 &= -\ 251^0\,48'\ 2''.04 + \lambda_1 - (1) + (5) \end{aligned}$$

oder wenn wir für $\lambda_1 - (1)$ die Bezeichnung u einführen

(welches aber verschieden ist von dem u in (3*))

(20*)
$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \quad . \quad + u + (1)\\
\lambda_2 &= -\ 51^0\ 33'\ 12''.60 + u + (2)\\
\lambda_3 &= -\ 50^0\ 42'\ 17''.94 + u + (3)\\
\lambda_4 &= -\ 243^0\ 29'\ 40''.56 + u + (4)\\
\lambda_5 &= -\ 251^0\ 48'\ \ 2''.04 + u + (5)
\end{aligned}$$

Ebenso gestaltet sich die Rechnung für die andern Beobachtungsreihen. Man führt ferner Näherungswerthe für die Richtungen (1) ... (5) ein und bildet schliesslich die Normalgleichungen; da nun aber nur die Richtungsunterschiede bestimmte Werthe haben, so wird dies auch die Auflösung der Normalgleichungen anzeigen, indem dieselbe nur für die Differenzen der Richtungswerthe bestimmte Werthe angiebt. Um aber für die Richtungswerthe selbst bestimmte Werthe zu erhalten, muss man entweder einen derselben beliebig annehmen oder eine Bedingungsgleichung zwischen ihnen einführen. In letzterer Weise hat Hansen die Ausgleichung der Richtungsbeobachtungen durchgeführt; die ausführlichen Untersuchungen desselben findet man im 8. und 9. Bande der Abhandl. der math. phys. Classe der K. Sächs. Ges. der Wissensch. zu Leipzig, eine kurze Anweisung dagegen in den Berichten über die Verhandlungen dieser Ges. von 1868.

Näherungsmethode. Bei der Vermessung von Grossbritanien (Ordnance Trigonometrical Survey of Great Britain and Ireland) wurde zur Ausgleichung der Stationsmessungen folgendes Annäherungsverfahren angewandt:

Man bestimmt erst Näherungswerthe für die unbekannten Winkel (2) aus Tableau (1) wie folgt:

$$(1.2) = 51^0\ 33' + \frac{12.60 \times 8 + 14.94 \times 2 + 10.65 \times 1}{8 + 2 + 1}$$

$$(1.3) = 50^0\ 42' + \frac{17.94 \times 8 + 19.33 \times 15}{8 + 15};\ \text{u. s. f.}$$

(21)
$$\begin{aligned}
(1.2) &= 51^0\ 33'\ 12''.85\\
(1.3) &= 50^0\ 42'\ 18''.72\\
(1.4) &= 243^0\ 29'\ 41''.12\\
(1.5) &= 251^0\ 48'\ \ 2''.24
\end{aligned}$$

Jeder der 4 Winkel ist demnach aus seinen directen Beobachtungen streng abgeleitet. Die erhaltenen Werthe zieht man nun von den resp. Werthen in (1) ab; das giebt die Differenzen:

(22)

1	2	3	4	5	Mittel aus	Quersumme		Quotient
0	— 0.25	— 0.78	— 0.56	— 0.20	8 Reih.	— 1.79	5	— 0.36
0	.	+ 0.61	+ 0.42	+ 0.07	15 „	+ 1.10	4	+ 0.28
0	+ 2.09	.	.	+ 0.56	2 „	+ 2.65	3	+ 0.88
0	— 2.20	.	— 1.68	.	1 „	— 3.88	3	— 1.29
.	+ 2.86	+ 1.28	.	.	1 „	+ 4.14	2	+ 2.07
.	.	+ 1.28	.	+ 3.31	1 „	+ 4.59	2	+ 2.30

Die beigefügten Colonnen rechts erklären sich selbst. Wir ziehen nun den .

1. Quot. — 0.36 ab von allen Zahlen der 1. Reihe in Tabl. (1)
2. „ + 0.28 . . . . . 2. . . . .

u. s. f.

und erhalten:

(23)

1	2	3	4	5	Mittel aus
0° 0′	51° 33′	50° 42′	243° 29′	251° 48′	
+0″.36	12″.96	18″.30	40″.92	2″.40	8 Reih.
—0″.28	.	19″.05	41″.26	2″.03	15 „
—0″.88	14″.06	.	.	1″.92	2 „
+1″.29	11″.94	.	40″.73	.	1 „
.	13″.64	17″.93	.	.	1 „
.	.	17″.70	.	3″.25	1 „

Dieses Tableau hat, weil zu den Angaben jeder Reihe nur immer eine Constante addirt ist, noch ganz den Charakter ungeänderter, unmittelbarer Beobachtungswerthe — sodass wir also z. B. darauf sofort eine strenge Ausgleichung gründen dürften. Wir setzen nun als genauere Näherungswerthe für die Richtungen (1) . . . (5) Folgendes hin:

$$(1) = 0^0\ 0' + \frac{8 \times 0.36 - 15 \times 0.28 - 2 \times 0.88 + 1.29}{8 + 15 + 2 + 1}$$

$$(2) = 51^0\ 33' + \frac{12.96 \times 8 + 14.06 \times 2 + 11.94 + 13.64}{8 + 2 + 1 + 1}\text{; u. s. f.}$$

$$(24)\quad \begin{cases} (1) = 359^0\ 59'\ 59''.93 \quad (2) = 51^0\ 33'\ 13''.12 \\ (3) = 50^0\ 42'\ 18''.71 \quad (4) = 243^0\ 29'\ 41''.12 \\ (5) = 251^0\ 48'\ 2''.18 \end{cases}$$

Diese Werthe sind schon ziemlich nahe den strengen Ausgleichungswerthen, denn für die Winkel (1.2) (1.3) (1.4) (1.5) ergeben sie bis auf wenige Hundertelsecunden die Werthe in Tableau (14). (Die Ord. Survey ging in der That in der Annäherung nicht weiter.) Wir wollen hier aber, um zu zeigen, dass man sich den wahren Werthen noch beliebig nähern kann, die Rechnung wiederholen und zunächst die letzten Näherungswerthe von Tableau (1) abziehen, was folgende Tabelle ergiebt:

(25)

1	2	3	4	5	Mittel aus	Quer-summe		Quotient
+ 0.07	− 0.52	− 0.77	− 0.56	− 0.14	8 Reih.	− 1.92	5	− 0.38
+ 0.07	.	+ 0.62	+ 0.42	+ 0.13	15 „	+ 1.24	4	+ 0.31
+ 0.07	+ 1.82	.	.	+ 0.62	2 „	+ 2.51	3	+ 0.84
+ 0.07	− 2.47	.	− 1.68	.	1 „	− 4.08	3	− 1.36
.	+ 2.59	+ 1.29	.	.	1 „	+ 3.88	2	+ 1.94
.	.	+ 1.29	.	+ 3.37	1 „	+ 4.66	2	+ 2.33

Die Quotienten ziehen wir von den Werthen der Tabelle (1) ab und erhalten dadurch ein Tableau, welches wie (23) dem der ursprünglichen Beobachtungswerthe gleich zu achten ist:

(26)

1	2	3	4	5	Mittel aus
0° 0′	51° 33′	50° 42′	243° 29′	251° 48′	
+ 0″.38	12″.98	18″.32	40″.94	2″.42	8 Reihen
− 0″.31	. .	19″.02	41″.23	2″.00	15 „
− 0″.84	14″.10	.	.	1″.96	2 „
+ 1″.36	12″.01	.	40″.80	.	1 „
.	13″.77	18″.06	.	.	1 „
.	.	17″.67	.	3″.22	1 „

und daraus folgen in der Weise, wie aus (23) die Werthe (24), die neuen Näherungswerthe für

(27)

	die Richtungen.	die Winkel
(1)	359° 59′ 59″.924	
(2)	51° 33′ 13″.154	(1.2) 51° 33′ 13″.23
(3)	50° 42′ 18″.704	(1.3) 50° 42′ 18″.78
(4)	243° 29′ 41″.115	(1.4) 243° 29′ 41″.19
(5)	251° 48′ 2″.173	(1.5) 251° 48′ 2″.25

welche letzteren mit denen in (14) schon auf Hundertelsecunden genau übereinkommen.

Die Methode dieses Annäherungsverfahrens ist im Princip dieselbe wie diejenige der indirecten Auflösungen in §. 18. Anstatt aber wie dort die verbesserten Werthe der Unbekannten in die Normalgleichungen einzuführen, werden sie hier erst in die Fehlergleichungen eingeführt und aus diesen erst wieder die Normalgleichungen gebildet, jedoch nur für die Unbekannte, welche gerade verbessert werden soll:

Für die Fehlergleichungen nehmen wir die Hansen'sche Form; für die erste Beobachtungsreihe gelten also die Gl. (20*). In diese führen wir die in (21) angegebenen Näherungswerthe ein, indem wir (1) gleich Null setzen, womit (2) ... (5) die Werthe für (1.2) ... (1.5) erhalten. Es wird

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \quad . \quad + u \\ \lambda_2 &= +0.25 + u \\ \lambda_3 &= +0.78 + u \\ \lambda_4 &= +0.56 + u \\ \lambda_5 &= +0.20 + u \end{aligned}$$

und daraus die Normalgleichung für u (abgesehen von dem für diese λ gemeinschaftlichen Gewicht 8)

$$5u = -1.79, \text{ mithin } u = -0.36.$$

Dies ist ein erster Näherungswerth für u; Tableau (22) enthält unter der Rubrik Quotienten für alle Reihen die Näherungswerthe von $u \ldots . u''''$. Indem wir diese letztern einstweilen als strenge Werthe betrachten, berechnen wir

nunmehr neue Näherungswerthe für (1) . . . (5). Es wird z. B. für (2) die Zusammenstellung derjenigen Fehlergleichungen, welche diese Unbekannte enthalten:

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= -51^0\,33'\,12''.60 + u + (2)\\
\lambda_2'' &= - \;.\;.\; 14''.94 + u'' + (2)\\
\lambda_2''' &= - \;.\;.\; 10''.65 + u''' + (2)\\
\lambda_2'''' &= - \;.\;.\; 15''.71 + u'''' + (2)
\end{aligned}$$

d. i. nach Einführung der Werthe $u\,u''\,u'''\,u''''$ aus Tableau (22)

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= -51^0\,33'\,12''.96 + (2) \quad \text{Gew. } 8\\
\lambda_2'' &= - \;.\;.\; 14''.06 + (2) \quad \text{„ } 2\\
\lambda_2''' &= - \;.\;.\; 11''.94 + (2) \quad \text{„ } 1\\
\lambda_2'''' &= - \;.\;.\; 13''.64 + (2) \quad \text{„ } 1
\end{aligned}$$

und hieraus folgt die Normalgleichung für (2)

$$12(2) = 12\times 51^0\,33' + 8\times 12''.96 + 2\times 14''.06 + 11''.94 + 13''.64$$

$$(2) = 51^0\,33'\,13''.12.$$

Tableau (23) und (24) geben in dieser Weise die Näherungswerthe für alle fünf Richtungen. Die Unbekannte (1) wird immer gerade so behandelt wie (2) . . . (5); es ist dies zwar nicht nothwendig, aber gerade durch die Wahl des sich so ergebenden Werthes für (1) wird die grosse Annäherung der Rechnung erzielt.

Ueber die Gewichte der Unbekannten und Functionen derselben giebt das Näherungsverfahren keine Auskunft, daher darf dasselbe nur da angewandt werden, wo es auf die Kenntniss der Genauigkeit der Ausgleichungsresultate nicht weiter ankommt.

Beispiel 10. Von einem zu bestimmenden Punkte aus wurden nach 5 durch rechtwinklige Coordinaten gegebenen Punkten Winkel gemessen nach Art vollständiger Satzbeobachtungen, sodass jeder Satz sämmtliche Objecte enthielt.

Tabl. (1) giebt die Beobachtungsresultate und die Coordinaten; für letztere liegt die positive x-Axe in der Richtung von Nord nach Süd und die positive y-Axe in der Richtung von O nach W; wachsende Richtungsangaben entsprechen wachsenden Azimuten.

(1)

Gegebener Punkt	Gemessene Richtung	Gegebene Coordinaten	
		x	y
1	$0^0\ 0'\ 0''$	0	0
2	$184^0\ 1'\ 41''.50$	-4228.239^m	-2646.895^m
3	$190^0\ 44'\ 18''.04$	-2450.104	-1536.840
4	$280^0\ 41'\ 38''.59$	$+949.776$	-4581.404
5	$312^0\ 47'\ 12''.36$	-100.177	-1735.395

Die gegebenen Coordinaten sind sphärische Coordinaten. Wir können aber für die hier in Betracht kommenden Coordinatendifferenzen rechnen wie in der Ebene.

Durch eine vorläufige Ermittlung fanden sich für den zu bestimmenden Punkt die genäherten Coordinaten

(1*) $\qquad -1992.6 \quad -1144.5$

denen wir Verbesserungen ξ und η zuzufügen haben.

Wir berechnen nun die Azimute der Richtungen von dem gesuchten nach den gegebenen Punkten aus den Formeln:

(2)
$$\begin{cases} \tan a_1 = \dfrac{0 + 1144.5 - \eta}{0 + 1992.6 - \xi} & \text{für die Richtung nach } 1 \\ \tan a_2 = \dfrac{-2646.895 + 1144.5 - \eta}{-4228.239 + 1992.6 - \xi} & \text{,, ,, ,, ,, } 2 \\ \tan a_3 = \dfrac{-1536.840 + 1144.5 - \eta}{-2450.104 + 1992.6 - \xi} & \text{,, ,, ,, ,, } 3 \\ \tan a_4 = \dfrac{-4581.404 + 1144.5 - \eta}{+949.776 + 1992.6 - \xi} & \text{,, ,, ,, ,, } 4 \\ \tan a_5 = \dfrac{-1735.395 + 1144.5 - \eta}{-100.177 + 1992.6 - \xi} & \text{,, ,, ,, ,, } 5 \end{cases}$$

Z. B. für a_4 haben wir folgende Rechnung

$$\tan a_4 = \frac{-(3436.904 + \eta)}{+(2942.376 - \xi)}.$$

a_4 liegt hiernach im vierten Quadranten und hat die Form $360 - a_4'$, wo a_4' einen spitzen Winkel bezeichnet, der sich unter Benutzung der logarithmischen Differenzen für die kleinen Grössen η und ξ wie folgt berechnet:

$$\log (3436.904 + \eta) = 3.5361674 + 0.0001263.6\,\eta$$
$$\log (2942.376 - \xi) = 3.4686982 - 0.0001476.0\,\xi$$
$$\log \tan a_4' = 0.0674692 + 0.0001263.6\,\eta + 0.0001476.0\,\xi$$
$$a_4' = 49^0\,25'\,57''.93 + 29.65\,\eta + 34.63\,\xi$$
$$a_4 = 310^0\,34'\,2''.07 - 29.65\,\eta - 34.63\,\xi$$

worin ξ und η in Metern einzuführen sind.

Man erhält im Ganzen

$$\begin{aligned}
a_1 &= 29^0\,52'\,19''.18 + 44.71\,\xi - 77.84\,\eta \\
a_2 &= 213^0\,54'\,6''.87 - 42.71\,\xi + 63.56\,\eta \\
a_3 &= 220^0\,36'\,55''.00 - 222.79\,\xi + 259.79\,\eta \\
a_4 &= 310^0\,34'\,2''.07 - 34.63\,\xi - 29.65\,\eta \\
a_5 &= 342^0\,39'\,33''.89 - 31.01\,\xi - 99.31\,\eta
\end{aligned} \tag{3}$$

Beobachtet sind die Differenzen der Azimute oder die Werthe

$$\begin{aligned}
&1. \quad 0^0\,0'\,0'' + u + \lambda_1 \\
&2. \quad 184^0\,1'\,41''.50 + u + \lambda_2 \\
&3. \quad 190^0\,44'\,18''.04 + u + \lambda_3 \\
&4. \quad 280^0\,41'\,38''.59 + u + \lambda_4 \\
&5. \quad 312^0\,47'\,12''.36 + u + \lambda_5
\end{aligned} \tag{4}$$

worin die λ die Verbesserungen der Beobachtungen sind und u eine unbekannte Hülfsgrösse ist. Diese hat im vorliegenden Falle eine bestimmte Bedeutung, nämlich diejenige einer Unbekannten, welche allen corrigirten Richtungsangaben beizufügen ist, um sie auf die Azimute $a_1 a_2 .. a_5$ zu reduciren.

Setzen wir demgemäss die resp. Ausdrücke (3) und (4) einander gleich, so wird

$$\left\{\begin{aligned}
0^0\,0'\,0'' + u + \lambda_1 &= 29^0\,52'\,19''.18 + 44.71\,\xi - 77.84\,\eta \\
184^0\,1'\,41''.50 + u + \lambda_2 &= 213^0\,54'\,6''.87 - 42.71\,\xi + 63.56\,\eta \\
190^0\,44'\,18''.04 + u + \lambda_3 &= 220^0\,36'\,55''.00 - 222.79\,\xi + 259.79\,\eta \\
280^0\,41'\,38''.59 + u + \lambda_4 &= 310^0\,34'\,2''.07 - 34.63\,\xi - 29.65\,\eta \\
312^0\,47'\,12''.36 + u + \lambda_5 &= 342^0\,39'\,33''.89 - 31.01\,\xi - 99.31\,\eta
\end{aligned}\right. \tag{5}$$

Für u führen wir den Näherungswerth $29^0\ 52'\ 20''.00$ ein und setzen

$$u = 29^0\ 52'\ 20''.00 - \zeta \tag{6}$$

das giebt

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -\ 0.82 + \zeta + 44.71\xi - 77.84\eta \\
\lambda_2 &= +\ 5.37 + \zeta - 42.71\xi + 63.56\eta \\
\lambda_3 &= +\ 16.96 + \zeta - 222.79\xi + 259.79\eta \\
\lambda_4 &= +\ 3.48 + \zeta - 34.63\xi - 29.65\eta \\
\lambda_5 &= +\ 1.53 + \zeta - 31.01\xi - 99.31\eta
\end{aligned} \tag{7}$$

und setzen wir ferner

$$\zeta = -\left\{\begin{aligned}
&\frac{-\ 0.82 + 5.37 + 16.96 + 3.48 + 1.53}{5} \\
&+ \frac{44.71 - 42.71 - 222.79 - 34.63 - 31.01}{5}\,\xi \\
&+ \frac{-\ 77.84 + 63.56 + 259.79 - 29.65 - 99.31}{5}\,\eta
\end{aligned}\right\} + \zeta'$$

oder

$$\zeta = -\ 5''.304 + 57.286\xi - 23.310\eta + \zeta' \tag{8}$$

so wird endlich

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -\ 6.12 + 101.99\xi - 101.15\eta + \zeta' \\
\lambda_2 &= +\ 0.07 + 14.58\xi + 40.25\eta \quad ,, \\
\lambda_3 &= +\ 11.66 - 165.50\xi + 236.48\eta \quad ,, \\
\lambda_4 &= -\ 1.82 + 22.66\xi - 52.96\eta \quad ,, \\
\lambda_5 &= -\ 3.77 + 26.28\xi - 122.62\eta \quad ,,
\end{aligned} \tag{9}$$

wobei wir wissen, dass ζ' gleich Null ist, wie sich auch bei der nun folgenden Bildung der Normalgleichungen ergiebt. Diese lauten mit Rücksicht auf Gewichtsberechnung:

$$\begin{array}{lrrr||c|c|c}
5\zeta' & . & . & 0 & 1 & . & . \\
. & 39208.9\xi & -\ 53289.4\eta = & 2693.2 & 0 & 1 & . \\
. & -\ 53289.4\xi & +\ 85614.6\eta = & -\ 3937.9 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
5\zeta' & -\ 14080.5\xi & +\ 32325.2\eta = & -\ 1244.7 & 1 & 1 & 1
\end{array} \tag{10}$$

Die Summengleichung, welche direct aus den Fehlergleichungen abgeleitet wurde, passt, wie man leicht erkennt, mit der Summe der Normalgleichungen.

Die Auflösung ergiebt die beiden Systeme

$$(11)\qquad \begin{array}{rrr||c|c|c} 5\zeta' & = & 0 & 1 & . & . \\ 39208.9\,\xi - 53289.4\,\eta & = & 2693.2 & . & 1 & . \\ 13188.0\,\eta & = & -\ 277.6 & . & +\ 1.35912 & 1 \end{array}$$

und

$$(12)\qquad \begin{array}{rrr||c|c|c} \zeta' & = & 0 & 0.2 & . & . \\ \xi - 1.35912\,\eta & = & +0.068688 & . & +0.000025504 & . \\ \eta & = & -\ 0.02105 & . & +0.000103057 & +0.000075826 \end{array}$$

sowie

$$(13)\qquad \begin{cases} \xi = +\ 0.04008 \\ \text{Abscisse des gesuchten Punktes} \quad = -\ 1992.560 \\ \eta = -\ 0.02105 \\ \text{Ordinate des gesuchten Punktes} \quad = -\ 1144.521 \\ \zeta' = \ 0 \\ u + \lambda_1, \text{ Azimut der Richtung nach } 1 \ = 29^0\ 52'\ 22''.61 \end{cases}$$

$\xi\,\eta\,\zeta'$ erfüllen die Summengl. (10) vollständig.

Die Verbesserungen λ sind

$$(14)\qquad \begin{array}{cccc} \lambda_1 = +\ 0.10 & \lambda_2 = -\ 0.19 & \lambda_3 = +\ 0.05 \\ \lambda_4 = +\ 0.20 & \lambda_5 = -\ 0.14 \end{array}$$

deren Quadratsumme 0.1082 beträgt.

$$[\lambda] = +\ 0.35 - 0.33$$

d. i., wie es zufolge der Form der Fehlergleichungen sein muss, hinreichend mit Null übereinstimmend.

Aus den Normalgleichungen (10) und Fehlergleichungen (7) folgt

$$(ll) = 331.604$$

$$(\lambda\lambda) = 331.604 - (26.52 \times 5.304 + \{2693.2 \times 0.068688 + 277.6 \times 0.02105\})$$

$$\text{d. i. } (\lambda\lambda) = 190.940 - \{\div\} = 0.106$$

in hinreichender Uebereinstimmung mit dem oben erhaltenen Werthe.

Der mittlere Fehler einer Richtungsangabe wird

$$(15)\qquad \mu = \sqrt{\frac{0.1082}{5-3}} = \mp\ 0''.23.$$

Die reciproken Gewichte für ξ und η sind resp.

$$0.00016557 \qquad 0.00007583$$

daher die mittleren Fehler der berechneten Abscisse und Ordinate des gesuchten Punktes:

$$\sqrt{0.0541 \times 0.00016557}, \quad \sqrt{0.0541 \times 0.00007583}$$

d. i.

$$(16) \qquad \mp 0.^{m}00299 \qquad \mp 0.^{m}00202.$$

Wir haben bis hierher stillschweigend vorausgesetzt, dass die Coordinaten der gegebenen Punkte streng richtig seien. Dies ist jedoch nicht der Fall und es werden mithin die λ und folglich auch μ theilweise in Coordinatenfehlern ihren Grund haben; jedoch nur in soweit, als es sich nur um die relativen Fehler der Figur zwischen den in Betracht kommenden Punkten handelt. Dagegen haben die dem ganzen Netztheil 1. 2. 3. 4. 5 gemeinsamen Fehler (Verschiebung und Drehung des ganzen Netztheiles) keinen Einfluss auf die λ und auf μ, vielmehr gehen sie in die Bestimmung von x und y als constante Fehler vollständig ein, indem der Punkt xy an dieser gemeinsamen Verschiebung etc. theilnimmt.

Eine genauere Untersuchung, welche wir hier uns versagen müssen, zeigt, dass, wie apriori zu vermuthen, auch ein Theil der relativen Fehler des Netztheiles auf λ und μ keinen Einfluss hat.

Im Vorhergehenden hatten wir angenommen, dass die fünf gegebenen Punkte nach Art der Satzbeobachtungen von dem zu bestimmenden Punkte aus anvisirt worden seien. Oftmals wird man aber nur einzelne Winkel messen oder auch mehrere Sätze, die jedoch nicht alle Objecte enthalten. In diesen Fällen ergiebt sich indess keine von der obigen erheblich abweichende Rechnung. Für jeden Winkel oder jeden der Sätze stellt man nämlich ein System Fehlergleichungen wie (7) und (9) auf, wobei man eine Winkelbeobachtung als Satz mit 2 Objecten ansehen kann. Die Grössen ξ der einzelnen Sätze sind verschiedene Unbekannte, ξ und η aber für alle Sätze dieselben.

Hat man nur Winkel gemessen, so kann man einfacher für jeden die beiden dem System (5) entsprechenden Richtungsfehlergleichungen von einander subtrahiren und dadurch u eliminiren. Ist z. B. der Winkel (1.2) gemessen zu $184^{0}\ 1'\ 41''.50$ und die Verbesserung desselben gleich v, so hat man

$184^0\ 1'\ 41''.50 + v = 184^0\ 1'\ 47''.69 - 87.42\xi + 141.40\eta$

und ebenso für jeden andern der gemessenen Winkel.

§. 21.

Gleichwerthige und vollständig äquivalente Beobachtungsreihen. Anwendungen. Reihenfolge der Unbekannten in besondern Fällen. Unvollständige Bestimmung der Unbekannten.

I. Gleichwerthige Beobachtungsreihen. Obwohl die Aufstellung von Normalgleichungen nur bei überschüssigen Messungen einen Sinn als ein erster Schritt der Ausgleichungsrechnung hat, so hindert doch nichts, sie auch zu bilden, wenn die Messungen eben nur gerade zur Bestimmung der Unbekannten hinreichen oder sogar nicht mehr hinreichen.

Hier beachten wir nur den erstern Fall der gerade hinreichenden Bestimmung. Die Fehlergleichungen gehen für denselben, da die λ gleich Null gesetzt werden müssen, in folgendes Gleichungssystem über:

$$(1)\qquad \begin{array}{l} 0 = -l_1 + a_1x + b_1y + c_1z \\ 0 = -l_2 + a_2x + b_2y + c_2z \\ 0 = -l_3 + a_3x + b_3y + c_3z \end{array} \Big| \begin{array}{l} \\ (m) \\ \\ \hline (n = m) \end{array}$$

Die dazu gehörenden m Normalgleichungen mit m Unbekannten

$$(2)\qquad \begin{array}{l} (aa)x + (ab)y + (ac)z = (al) \\ (ab)x + (bb)y + (bc)z = (bl) \\ (ac)x + (bc)y + (cc)z = (cl) \end{array}$$

ersetzen nun nicht nur in Bezug auf die Berechnung von $x\,y\,z$ die (1) vollständig, sondern sie gestatten auch, in bekannter Weise aufgelöst, die Gewichtsberechnung. Es ist auch leicht zu erkennen, dass wegen $n = m$ die in §. 11. für letztere angegebene Entwicklung ihre Gültigkeit nicht verliert.

Wenn noch auf irgend eine Weise der mittlere Fehler der Beobachtungen bekannt wird, so kann man auch die

mittlern Fehler der Unbekannten und beliebiger Functionen derselben berechnen.

Denken wir uns nun den Fall, dass zwei Beobachtungsreihen übereinstimmende Normalgleichungssysteme entsprechen, so können wir sie als gleichwerthig bezeichnen, da sie für die Unbekannten und beliebige Functionen derselben nach §. 11. und §. 19. (11). dieselben Werthe und Gewichte ergeben werden.

Insbesondere können wir uns jedes System von m Normalgleichungen auch durch m Gleichungen der Form (1) entstanden denken d. h. durch eine gerade genügende Anzahl Messungen. Eine solche fingirte Beobachtungsreihe und ihr Gleichungssystem (1) wollen wir als eine Beobachtungsreihe und ein Gleichungssystem bezeichnen, welche der gegebenen Beobachtungsreihe und deren Normalgleichungssystem vollständig äquivalent sind.

II. Bedingungen der Aequivalenz. Setzen wir beispielsweise $m = 3$ und bezeichnen die Coefficienten der äquivalenten Gleichungen mit gothischen Lettern, so werden die Bedingungen der Aequivalenz unter der Voraussetzung, dass den äquivalenten Gleichungen das Gewicht 1 beigelegt werde,

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_3 = (a\,a)\\
&\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3 = (a\,b)\\
&\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{c}_2 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{c}_3 = (a\,c)\\
&\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_3 = (b\,b)\\
&\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2 + \mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3 = (b\,c)\\
&\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_2 + \mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_3 = (c\,c)
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{a}_1\mathfrak{l}_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{l}_2 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{l}_3 = (a\,l)\\
&\mathfrak{b}_1\mathfrak{l}_1 + \mathfrak{b}_2\mathfrak{l}_2 + \mathfrak{b}_3\mathfrak{l}_3 = (b\,l)\\
&\mathfrak{c}_1\mathfrak{l}_1 + \mathfrak{c}_2\mathfrak{l}_2 + \mathfrak{c}_3\mathfrak{l}_3 = (c\,l)
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

Die (4) bestimmen die $\mathfrak{l}$ vollständig, wenn erst die $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}$ bekannt sind. Zur Bestimmung dieser 9 Grössen giebt das System (3) nur 6 Gleichungen. Es ist daher auf mehr als eine Weise möglich, ein äquivalentes System abzuleiten: es ist die Anzahl dieser Systeme sogar unendlich gross.

Für uns ist ein äquivalentes System besonders interessant, nämlich das System der reducirten Normalgleichungen §. 13. Für 3 Unbekannte lautet es:

$$x + \frac{(a\,b)}{(a\,a)}y + \frac{(a\,c)}{(a\,a)}z = \frac{(a\,l)}{(a\,a)} \quad \text{mit Gewicht} \quad (a\,a)$$

(5) $$y + \frac{(b\,c.1)}{(b\,b.1)}z = \frac{(b\,l.1)}{(b\,b.1)} \quad ,, \quad ,, \quad (b\,b.1)$$

$$z = \frac{(c\,l.2)}{(c\,c.2)} \quad ,, \quad ,, \quad (c\,c.2)$$

oder in anderer Bezeichnung

$$x + \alpha_1' y + \beta_1' z = \chi_1 \quad \text{Gew.} \quad (a\,a)$$

(5*) $$y + \beta_2' z = \chi_2 \quad ,, \quad (b\,b.1)$$

$$z = \chi_3 \quad ,, \quad (c\,c.2)$$

Bildet man die zu (5) oder (5*) gehörenden Normalgleichungen, indem man $\chi_1\ \chi_2\ \chi_3$ als unabhängige Beobachtungswerthe ansieht, so erhält man wieder das System (2), wie man sich leicht überzeugen kann. Es ist daher das System der reducirten Normalgleichungen jederzeit den gegebenen Beobachtungen vollständig äquivalent und zwar sind die fingirten Beobachtungswerthe, welche als unabhängig von einander anzusehen sind:

$$l_1 = \chi_1 \text{ oder } \frac{(a\,l)}{(a\,a)} \quad \text{mit Gewicht} \quad (a\,a)$$

$$l_2 = \chi_2 \quad ,, \quad \frac{(b\,l.1)}{(b\,b.1)} \quad ,, \quad ,, \quad (b\,b.1)$$

$$l_3 = \chi_3 \quad ,, \quad \frac{(c\,l.2)}{(c\,c.2)} \quad ,, \quad ,, \quad (c\,c.2)$$

Beispielsweise erwähnen wir, dass für die Bestimmung von $\zeta'\ \xi\ \eta$ in **Beispiel 10.** das System (12) ein vollständig äquivalentes System ist:

$$\zeta' \quad . \quad . \quad = \quad 0 \quad \text{Gew.} \quad 5$$

$$\xi - 1.35912\,\eta = +\ 0.06869 \quad ,, \quad 39209$$

$$\eta = -\ 0.02105 \quad ,, \quad 13188$$

und man erhält aus demselben rückwärts unschwer in üblicher Weise die Normalgleichungen (10) daselbst.

Das System der reducirten Normalgleichungen reicht aus zur Beantwortung jeder Frage, die man an die Ausgleichungsrechnung der ursprünglichen Beobachtungswerthe

stellen kann, ausgenommen was die Verbesserungen λ der letzteren und den mittlern Beobachtungsfehler μ anlangt. Es gewährt daher das System der reducirten Normalgleichungen im Verein mit dem mittlern Beobachtungsfehler μ der Gewichtseinheit eine vollkommene Uebersicht der Ausgleichungsresultate.

Eine solche ist dagegen in der alleinigen Angabe der Werthe der Unbekannten und ihrer Gewichte nicht enthalten.

III. Anwendungen. *A.* Wenn nach geschehener Ausgleichung eine der Functionen

$$x + \alpha_1' y + \beta_1' z, \quad y + \beta_2' z, \quad z$$

noch auf anderem Wege bekannt wird, so kann man ohne Weiteres die beiden Bestimmungen vereinigen. Ergiebt sich z. B. für z ein Werth χ_3' mit Gewicht g' und erinnern wir uns, dass die Ausgleichung für z den Werth χ_3 mit Gewicht $g = (cc.2)$ ergab, so haben wir anzunehmen

$$z = \frac{\chi_3 g + \chi_3' g'}{g + g'} \tag{6}$$

und das Gewicht dieser Bestimmung ist nunmehr $g + g'$.

In Folge der Neubestimmung von z ändern sich auch die Werthe und Gewichte von x und y. Für letztere Unbekannte haben wir aus der 2. Gleichung (5*)

$$y = \chi_2 - \beta_2' z$$

wozu für z der Werth aus (6) zu entnehmen ist. Das reciproke Gewicht dieser Bestimmung wird, da χ_2 und z unabhängig von einander sind, gleich

$$\frac{1}{(bb.1)} + \frac{\beta_2'^2}{(cc.2) + g'}. \tag{7}$$

Sind andere Functionen als die oben genannten nachträglich beobachtet worden, so kann in der Regel die Vereinigung aller Messungen nur durch Herstellung eines Normalgleichungssystems erfolgen.

B. Es seien der Werth und das mittlere Fehlerquadrat der Function

$$F = F_1 x + F_2 y + F_3 z \tag{8}$$

anzugeben: Der Werth von F wird durch einfache Substitution der Werthe von $x\ y\ z$ gefunden. Dagegen wäre es fehlerhaft, für das mittlere Fehlerquadrat nach §. 6. setzen

zu wollen:

$$\mu_F{}^2 = F_1{}^2\mu_x{}^2 + F_2{}^2\mu_y{}^2 + F_3{}^2\mu_z{}^2$$

weil $x\ y\ z$ nicht unabhängig von einander sind. Drücken wir F aber durch die unabhängigen Werthe $\chi_1\ \chi_2\ \chi_3$ aus, so kann nach §. 6. gerechnet werden. Es ist aber nach §. 17. (XIII)

$$(9)\qquad \begin{aligned} x &= \chi_1 - \chi_2\alpha_1' - \chi_3\alpha_2' \\ y &= \chi_2 - \chi_3\beta_2' \\ z &= \chi_3 \end{aligned} \quad \text{daher}$$

$$F = F_1\chi_1 + (F_2 - F_1\alpha_1')\chi_2 + (F_3 - F_2\beta_2' - F_1\alpha_2')\chi_1$$

d. i. nach §. 19. (12)

$$(10)\qquad F = F_1\chi_1 + (F_2.1)\chi_2 + (F_3.2)\chi_3$$

mithin ist

$$(11)\qquad \mu_F{}^2 = \mu^2\left\{\frac{F_1^2}{(a\,a)} + \frac{(F_2.1)^2}{(bb.1)} + \frac{(F_3.2)^2}{(cc.2)}\right\}$$

übereinstimmend mit §. 19. (13).

C. Werden $x\ y\ z$ nachträglich einer Bedingungsgleichung unterworfen, so kann man in dieselbe statt $x\ y\ z$ auch $\chi_1\ \chi_2\ \chi_3$ einführen und da diese unabhängige Beobachtungswerthe vorstellen, deren von der Bedingungsgleichung geforderten Verbesserungen berechnen nach Art der Ausgleichung bedingter Beobachtungen (§. 22.). Führt man in (5*) die verbesserten χ ein, so erhält man damit auch die verbesserten Werthe der Unbekannten $x\ y\ z$.

IV. Verschiedene Reihenfolge der Unbekannten. Setzen wir in den Bedingungsgleichungen (3) der Aequivalenz drei Coefficienten, nämlich $a_2\ a_3\ b_2$ gleich Null, um den äquivalenten Gleichungen die Form der reducirten Normalgleichungen zu geben, so sind nur noch 6 Unbekannte aus 6 Gleichungen zu bestimmen und daher nur eine einzige Lösung vorhanden. Es gilt dies nicht nur für 3 sondern für beliebige m Unbekannte. Es giebt daher nur ein äquivalentes System von der Form der reducirten Normalgleichungen. Jedoch ist dasselbe noch von der Reihenfolge der Unbekannten abhängig; für m Unbekannte giebt es aber $1.2.3\ldots m$ verschiedene Reihenfolgen und daher ist die Anzahl der äquivalenten Systeme von der Form der reducirten Normalgleichungen, aber sämmtlich verschiedener Reihenfolge der Unbekannten, gleich $1.2.3\ldots m$.

Welche Reihenfolge man wählt, hängt von besondern Umständen der Aufgabe ab. Ist uns beispielsweise schon bei Beginn der Ausgleichung bekannt, dass später noch directe Beobachtungen von x hinzutreten werden, so nehmen wir x als die letzte in der Reihenfolge, damit die Berechnung der Endwerthe von $x\,y\,z\,\ldots$ wie in III. *A.* d. §. möglichst einfach sich gestalte.

Oder wissen wir, dass zwischen einem Theile der Unbekannten Bedingungsgleichungen bestehen, die aber erst später berücksichtigt werden können, so nehmen wir diese Unbekannten als die letzten. Findet insbesondere bei 3 Unbekannten zwischen x und z eine Bedingungsgleichung statt, so würden bei der Reihenfolge $x\,y\,z$ alle drei äquivalenten Beobachtungen $\chi_1\,\chi_2\,\chi_3$ in die Bedingungsgleichung eintreten; dagegen bei der Reihenfolge $y\,x\,z$ nur χ_2 und χ_3, womit sich daher eine einfachere Rechnung ergiebt, weil χ_1 von der Bedingungsgleichung nicht afficirt wird. (Beisp. 9. S. 147.)

V. Unvollständige Bestimmungen. Reichen die Beobachtungen nicht aus zur völligen Bestimmung der Unbekannten, obgleich sie der Zahl nach dazu ausreichen müssten, $(n \geqq m)$, so zeigt die Auflösung der Normalgleichungen dies dadurch an, dass man auf Gleichungen kommt, deren sämmtliche Glieder Null sind. Wird z. B. §. 13. (29) die 2. Gleichung in allen Gliedern Null, ist also

$$(12) \qquad (bc.1) = (cc.1) = (cd.1) = (cl.1) = 0$$

so kann die vollständige Bestimmung aller Unbekannten nicht erreicht werden. In diesem Falle genügt übrigens schon ein Blick auf die Fehlergleichungen, um dies zu erkennen. Denn es folgt aus (12) für $(cl.1) = 0$

$$l_1\left(c_1 - a_1\frac{(ac)}{(aa)}\right) + l_2\left(c_2 - a_2\frac{(ac)}{(aa)}\right) + \ldots (n) = 0$$

und da dies unabhängig von den besondern Werthen l stattfindet, so muss jedes Glied verschwinden; es ist also

$$0 = c_1 - a_1\frac{(ac)}{(aa)} = c_2 - a_2\frac{(ac)}{(aa)} = \ldots (n)$$

oder

$$(13) \qquad \frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = \ldots (n).$$

Damit werden aber auch $(bc.1) = (cc.1) = (cd.1) = 0$. Sobald mithin in allen Fehlergleichungen die Coefficienten zweier Unbekannten in gleichem Verhältnisse stehen, lassen dieselben sich nicht vollständig bestimmen. Eine der beiden muss entweder als gegeben betrachtet werden, oder es müssen die Glieder mit den beiden Unbekannten in Vielfache einer neuen Unbekannten zusammengefasst werden; im obigen Falle würde dies $(x + \frac{c}{a}z)$ sein können.

Ist in jeder Fehlergleichung die Coefficientensumme s gleich Null, so ist die Auflösung der Aufgabe auch nicht vollständig ausführbar. Denn alsdann wird die Summengleichung identisch Null, es können daher die Normalgleichungen selbst nicht mehr unabhängig von einander sein.

In der Regel wird man schon zum Voraus wissen, wenn die gegebenen Fehlergleichungen ihrer besondern Form wegen nicht zu einer vollständigen Auflösung zureichen. (Man vergl. Beisp. 9. S. 154 woselbst in (20* für $u = -u'$ auch $s = 0$ wird.)

Sind die Beobachtungen nicht zahlreich genug, $n < m$, und bildet man doch die Normalgleichungen, so zeigt deren Auflösung es ebenfalls an, dass eine vollständige Bestimmung nicht möglich ist, indem man auf eine oder mehrere in allen Gliedern verschwindende Gleichungen stösst.

In jedem Falle einer unvollständigen Bestimmung ist es aber zulässig, die Normalgleichungen zu bilden und sie so gut es geht aufzulösen. Diejenigen abgeleiteten Gleichungen, welche verschwinden, werden einfach weggelassen. So erhält man z. B. entsprechend (12) das reducirte Normalgleichungssystem:

$$(14)\qquad \begin{aligned} x + \alpha_1' y + \beta_1' z + \gamma_1' t &= \chi_1 \quad \text{Gew.} \quad (aa) \\ y + \;.\; + \gamma_2' t &= \chi_2 \quad \text{„} \quad (bb.1) \\ . \quad . \quad . & \\ t &= \chi_4 \quad \text{„} \quad (dd.3) \end{aligned}$$

Die Werthe von t, y und $(x + \beta_1' z)$ d. i. $(x + \frac{c}{a} z)$ sowie deren Gewichte lassen sich daraus vollständig bestimmen, nicht aber x und z einzeln.

Ist die Coefficientenrelation (13) nur nahezu erfüllt, so werden x und z einzeln zwar sich bestimmen lassen, jedoch mit sehr kleinen Gewichten, während $(x+\beta_1' z)$ im Allgemeinen erheblich genauer bestimmt sein wird.

Löst man die Normalgleichungen nicht streng auf, sondern durch Annäherung, so wird man auch bei unvollständiger Bestimmung für alle Unbekannte Werthe erhalten; im Falle der Gl. (12) z. B. auch für x und z einzeln. Diese Werthe sind aber einzeln fehlerhaft, nur das Aggregat $(x+\frac{c}{a}z)$ derselben ist richtig. In dem Annäherungsverfahren des Beisp. 9 haben ebenso nur die Differenzen (2) — (1) (3) — (1), (4) — (1), (5) — (1) bestimmte Werthe, die man immer wieder erhält, welche besondere Werthe von (1)...(5) auch durch die zufällige Wahl von Näherungswerthen dieser Grössen schliesslich als definitiv hervorgehen.

IV. Abschnitt.

§. 22.

Ausgleichung bedingter Beobachtungen durch Reduction auf vermittelnde. Directes Verfahren. Mittlerer Fehler einer Function der Beobachtungswerthe. Beurtheilungsmomente für die Wahl zwischen beiden Verfahren.

I. Reduction der Aufgabe auf die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen. Bereits in §. 5. III. ist die allgemeine Form, unter der sich die Aufgabe darstellen lässt, angegeben worden. Mit Beibehaltung der daselbst eingeführten Bezeichnungen haben wir die plausibelsten Verbesserungen λ der n Beobachtungswerthe l so zu bestimmen, dass die r Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{array}{l|l} 0 = w_1 + p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + p_3\lambda_3 + p_4\lambda_4 + p_5\lambda_5 & \\ 0 = w_2 + q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 + q_3\lambda_3 + q_4\lambda_4 + q_5\lambda_5 & (n) \\ 0 = w_3 + r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2 + r_3\lambda_3 + r_4\lambda_4 + r_5\lambda_5 & \\ \hline & (r) \end{array}$$

erfüllt werden.

Da wir die Lösung für die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen bereits kennen, so empfiehlt es sich zunächst, die neue Aufgabe darauf zu reduciren.

Mit Hülfe der r Gleichungen (1) können wir nun r beliebige λ durch die $n - r$ übrigen ausdrücken, z. B. für $n = 5$, $r = 3$, $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ durch λ_4 und λ_5. Bezeichnen wir diese letztern $n - r$ Verbesserungen λ durch $x\ y\ \ldots$, so wird erhalten:

$$(2)\qquad \left.\begin{array}{l} \lambda_1 = -u_1 + a_1 x + b_1 y \\ \lambda_2 = -u_2 + a_2 x + b_2 y \\ \lambda_3 = -u_3 + a_3 x + b_3 y \end{array}\right| \begin{array}{l}(n-r)\\ \\ \\ (r).\end{array}$$

wobei $a,\ b\ \ldots$ von den $p\ q\ r\ \ldots$ abhängige Coefficienten, die u aber Functionen der w sind. Die Gleichungen (2) haben die Form von Fehlergleichungen, worin $x\ y\ \ldots$ die Unbekannten, u die Beobachtungswerthe sind. Es treten zu denselben noch $n - r$ weitere Gleichungen, nämlich:

$$(2^*)\qquad \left.\begin{array}{l} \lambda_4 = \quad . \quad + x \quad . \\ \lambda_5 = \quad . \quad . \quad + y \end{array}\right| \begin{array}{l}(n-r)\\ \\ (n-r)\end{array}$$

und stellt man die Systeme (2) und (2*) zusammen, so erhält man ein System von n Fehlergleichungen mit $n - r$ Unbekannten, dessen Ausgleichung in bekannter Weise erfolgen kann.

II. Directe Auflösung. Die soeben gegebene Auflösung der Ausgleichung bedingter Beobachtungen ist keine symmetrische in Bezug auf die unbekannten λ, da beliebige $n - r$ derselben herausgegriffen und als Unbekannte $x\ y$ eingeführt werden müssen. Es ist wünschenswerth, eine symmetrische Lösung kennen zu lernen, die zugleich eine directe sein und den Uebergang zu vermittelnden Beobachtungen unnöthig machen wird.

Wie auch diese Lösung sich gestalten möge, so ist doch soviel klar, dass sie dieselben Rechnungsresultate ergeben muss, wie die bislang gegebene. Denn der Unterschied in den zu Grunde liegenden Gleichungen ist nur ein formeller. Bislang haben wir $[\lambda\lambda]$ zu einem Minimum gemacht, mit Rücksicht auf (2. 2*), nunmehr werden wir das Minimum

erzielen mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen (1); aus diesen sind aber (2. 2*) hervorgegangen, ohne dass etwas anderes als einige neue Symbole hinzugekommen wären.

Es wird daher auch die neue Auflösung, auf welche wir nun übergehen, ganz die Eigenschaften haben, welche die Auflösungsergebnisse der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen besitzen. (§. 12.)

Nehmen wir den allgemeinen Fall verschiedener Genauigkeit in der Bestimmung der Beobachtungswerthe und seien demgemäss $g_1\, g_2\, g_3 \ldots$ die Gewichte der resp. l oder λ und bezeichnen ferner $-2k_1 - 2k_2 \ldots$ vorläufig unbekannte Hülfsgrössen, an Zahl so viele als Gleichungen (1), so wird $[\lambda\lambda g]$ ein Minimum unter Berücksichtigung der Gl. (1), wenn der Ausdruck

$$[\lambda\lambda g] - 2k_1(w_1 + [p\lambda]) - 2k_2(w_2 + [q\lambda]) - 2k_3(w_3 + [r\lambda]) \ldots (m)$$

ein Minimum wird, wobei jede der Grössen λ als unabhängige Variable aufzufassen ist. Setzen wir die partiellen Differentialquotienten dieses Ausdrucks daher einzeln gleich Null, so ergeben sich die n Gleichungen des Minimum:

$$(3)\qquad \begin{array}{l|l} \lambda_1 g_1 = k_1 p_1 + k_2 q_1 + k_3 r_1 & \\ \lambda_2 g_2 = k_1 p_2 + k_2 q_2 + k_3 r_2 & \\ \lambda_3 g_3 = k_1 p_3 + k_2 q_3 + k_3 r_3 & (r) \\ \lambda_4 g_4 = k_1 p_4 + k_2 q_4 + k_3 r_4 & \\ \lambda_5 g_5 = k_1 p_5 + k_2 q_5 + k_3 r_5 & \\ \hline (n) & \end{array}$$

welche die Verbesserungen λ symmetrisch durch die Hülfsgrössen k ausdrücken. Letztere nennt man Correlaten und die Gleichungen (3) Correlatengleichungen.

Substituirt man die Werthe der λ in die Gleichungen (1), so ergeben sich zur Bestimmung der r Correlaten k auch r Gleichungen, sogenannte Normalgleichungen:

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{pp}{g}\right] k_1 + \left[\frac{pq}{g}\right] k_2 + \left[\frac{pr}{g}\right] k_3 + w_1 = 0 \\
(4) \qquad &\left[\frac{pq}{g}\right] k_1 + \left[\frac{qq}{g}\right] k_2 + \left[\frac{qr}{g}\right] k_3 + w_2 = 0 \\
&\left[\frac{pr}{g}\right] k_1 + \left[\frac{qr}{g}\right] k_2 + \left[\frac{rr}{g}\right] k_3 + w_3 = 0
\end{aligned}
$$

oder abgekürzt:

$$
\begin{aligned}
&(pp)k_1 + (pq)k_2 + (pr)k_3 + w_1 = 0 \\
(4^*) \qquad &(pq)k_1 + (qq)k_2 + (qr)k_3 + w_2 = 0 \\
&(pr)k_1 + (qr)k_2 + (rr)k_3 + w_3 = 0
\end{aligned}
$$

Diese r Normalgleichungen mit r Unbekannten haben ganz die Form der Normalgleichungen bei vermittelnden Beobachtungen und bilden sich, was die Coefficienten der Unbekannten anlangt, aus den Correlatengleichungen (3), wenn man erst jede derselben durch Division mit g auf λ selbst reducirt, genau so wie die Normalgleichungen vermittelnder Beobachtungen aus ihren Fehlergleichungen. Nur über die Widersprüche w geben die Correlatengleichungen nichts an.

Die Auflösungen von (4*) kann nach irgend einer der angegebenen Methoden für die Auflösung der Normalgleichungen vermittelnder Beobachtungen erfolgen. Zur Controlle dient dabei ebenfalls eine doppelt zu bildende Summennormalgleichung.

III. Mittlerer Fehler einer Function der ausgeglichenen Beobachtungswerthe. Spinnt man die Analogie weiter fort und bildet die den Gl. (4) entsprechenden Gewichtsgleichungssysteme, so erhält man in den Q mit quadratischen Indices, wie leicht zu zeigen ist, die reciproken Gewichte in der Bestimmung der k.

Allein es interessiren die k und ihre Gewichte selbst nicht. Es entsteht vielmehr die Frage nach dem Gewichte einer Function der ausgeglichenen Beobachtungsgrössen.

Substituiren wir in eine Function F der Beobachtungsgrössen deren unausgeglichene Werthe $l_1\ l_2\ l_3 \ldots$, also von einander unabhängige Grössen und setzen für die partiellen Differentialquotienten von F nach den l:

$$\frac{\partial F}{\partial l_1} = f_1, \quad \frac{\partial F}{\partial l_2} = f_2 \ldots (n)$$

so wird das Quadrat des mittlern Fehlers in F

$$\mu_F^2 = \mu^2 \left(\frac{f_1^2}{g_1} + \frac{f_2^2}{g_2} + \frac{f_3^2}{g_3} + \ldots (n) \right)$$

oder kurz

$$\mu_F^2 = \mu^2 \left[\frac{ff}{g} \right] = \mu^2 (ff) \tag{5}$$

worin μ den mittlern Fehler für eine Beobachtung vom Gewichte 1 bedeutet.

Substituiren wir aber die ausgeglichenen Beobachtungswerthe $l_1 + \lambda_1$, $l_2 + \lambda_2$, $l_3 + \lambda_3$,... in die Function F, so ist zu bedenken, dass die Werthe der λ abhängig von einander und selbst Functionen der l sind. Es wird daher für die totalen Aenderungen von F nach den l:

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dl_1} &= f_1 + \frac{d\lambda_1}{dl_1} f_1 + \frac{d\lambda_2}{dl_1} f_2 + \frac{d\lambda_3}{dl_1} f_3 + \ldots (n) \\
\frac{dF}{dl_2} &= f_2 + \frac{d\lambda_1}{dl_2} f_1 + \frac{d\lambda_2}{dl_2} f_2 + \frac{d\lambda_3}{dl_2} f_3 + \ldots (n) \\
\frac{dF}{dl_3} &= f_3 + \frac{d\lambda_1}{dl_3} f_1 + \frac{d\lambda_2}{dl_3} f_2 + \frac{d\lambda_3}{dl_3} f_3 + \ldots (n) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (n)
\end{aligned}$$

und damit ist

$$\mu_F^2 = \mu^2 \left(\frac{1}{g_1} \left(\frac{dF}{dl_1} \right)^2 + \frac{1}{g_2} \left(\frac{dF}{dl_2} \right)^2 + \frac{1}{g_3} \left(\frac{dF}{dl_3} \right)^2 + \ldots (n) \right). \tag{6}$$

Diese Formel ist aber beträchtlicher Vereinfachung fähig. Zunächst hat man aus den Correlatengleichungen für irgend eines der l ($r = 3$ gesetzt):

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda_1}{dl} &= \frac{p_1}{g_1} \frac{\partial k_1}{\partial l} + \frac{q_1}{g_1} \frac{\partial k_2}{\partial l} + \frac{r_1}{g_1} \frac{\partial k_3}{\partial l} \\
\frac{d\lambda_2}{dl} &= \frac{p_2}{g_2} \frac{\partial k_1}{\partial l} + \frac{q_2}{g_2} \frac{\partial k_2}{\partial l} + \frac{r_2}{g_2} \frac{\partial k_3}{\partial l} \\
\frac{d\lambda_3}{dl} &= \frac{p_3}{g_3} \frac{\partial k_1}{\partial l} + \frac{q_3}{g_3} \frac{\partial k_2}{\partial l} + \frac{r_3}{g_3} \frac{\partial k_3}{\partial l} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (n)
\end{aligned}$$

und damit

$$
(7)\quad
\begin{aligned}
\frac{dF}{dl_1} &= f_1 + \left[\frac{pf}{g}\right]\frac{\partial k_1}{\partial l_1} + \left[\frac{qf}{g}\right]\frac{\partial k_2}{\partial l_1} + \left[\frac{rf}{g}\right]\frac{\partial k_3}{\partial l_1}\\
\frac{dF}{dl_2} &= f_2 + \left[\frac{pf}{g}\right]\frac{\partial k_1}{\partial l_2} + \left[\frac{qf}{g}\right]\frac{\partial k_2}{\partial l_2} + \left[\frac{rf}{g}\right]\frac{\partial k_3}{\partial l_2}\\
\frac{dF}{dl_3} &= f_3 + \left[\frac{pf}{g}\right]\frac{\partial k_1}{\partial l_3} + \left[\frac{qf}{g}\right]\frac{\partial k_2}{\partial l_3} + \left[\frac{rf}{g}\right]\frac{\partial k_3}{\partial l_3}
\end{aligned}
$$

$$(n)$$

Um die Differentialquotienten der k nach den l zu berechnen, müssen wir die k durch die l darstellen.

Berechnet man nun (analog wie bei vermittelnden Beobachtungen) ein System von Hülfsgrössen Q nach den Gleichungen:

$$
(8)\quad
\begin{aligned}
(pp)\,Q_{1.1} + (pq)\,Q_{1.2} + (pr)\,Q_{1.3} &= 1\\
(pq)\,Q_{1.1} + (qq)\,Q_{1.2} + (qr)\,Q_{1.3} &= 0\\
(pr)\,Q_{1.1} + (qr)\,Q_{1.2} + (rr)\,Q_{1.3} &= 0
\end{aligned}
$$

$$
(9)\quad
\begin{aligned}
(pp)\,Q_{1.2} + (pq)\,Q_{2.2} + (pr)\,Q_{2.3} &= 0\\
(pq)\,Q_{1.2} + (qq)\,Q_{2.2} + (qr)\,Q_{2.3} &= 1\\
(pr)\,Q_{1.2} + (qr)\,Q_{2.2} + (rr)\,Q_{2.3} &= 0
\end{aligned}
$$

$$
(10)\quad
\begin{aligned}
(pp)\,Q_{1.3} + (pq)\,Q_{2.3} + (pr)\,Q_{3.3} &= 0\\
(pq)\,Q_{1.3} + (qq)\,Q_{2.3} + (qr)\,Q_{3.3} &= 0\\
(pr)\,Q_{1.3} + (qr)\,Q_{2.3} + (rr)\,Q_{3.3} &= 1
\end{aligned}
$$

so wird

$$
\begin{aligned}
k_1 + w_1\,Q_{1.1} + w_2\,Q_{1.2} + w_3\,Q_{1.3} &= 0\\
k_2 + w_2\,Q_{1.2} + w_2\,Q_{2.2} + w_3\,Q_{2.3} &= 0\\
k_3 + w_3\,Q_{1.3} + w_3\,Q_{2.3} + w_3\,Q_{3.3} &= 0
\end{aligned}
$$

und da nun

$$
\left.
\begin{aligned}
w_1 &= p_0 + p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 + p_4 l_4\\
w_2 &= q_0 + q_1 l_1 + q_2 l_2 + q_3 l_3 + p_4 l_4\\
w_3 &= r_0 + r_1 l_1 + r_2 l_2 + r_3 l_3 + r_4 l_4
\end{aligned}
\right|\ (n)
$$

ist, so wird

$$
\begin{aligned}
(11)\quad k_1 = -(p_0 Q_{1.1} + q_0 Q_{1.2} + r_0 Q_{1.3}) &- (p_1 Q_{1.1} + q_1 Q_{1.2} + r_1 Q_{1.3})\,l_1\\
&- (p_2 Q_{1.1} + q_2 Q_{1.2} + r_2 Q_{1.3})\,l_2\\
&- (p_3 Q_{1.1} + q_3 Q_{1.2} + r_3 Q_{1.3})\,l_3
\end{aligned}
$$

$$(n)$$

$$(12)\ k_2 = -(p_0 Q_{1.2} + q_0 Q_{2.2} + r_0 Q_{2.3}) - (p_1 Q_{1.2} + q_1 Q_{2.2} + r_1 Q_{2.3}) l_1 - (p_2 Q_{1.2} + q_2 Q_{2.2} + r_2 Q_{2.3}) l_2 - (p_3 Q_{1.2} + q_3 Q_{2.2} + r_3 Q_{2.3}) l_3 \quad (n)$$

$$(13)\ k_3 = -(p_0 Q_{1.3} + q_0 Q_{2.3} + r_0 Q_{3.3}) - (p_1 Q_{1.3} + q_1 Q_{2.3} + r_1 Q_{3.3}) l_1 - (p_2 Q_{1.3} + q_2 Q_{2.3} + r_2 Q_{3.3}) l_2 - (p_3 Q_{1.3} + p_3 Q_{2.3} + r_3 Q_{3.3}) l_3 \quad (n)$$

Hiernach hat man für beliebige l, ($l\ p\ q\ r$ mit gleichen Indices):

$$\frac{\partial k_1}{\partial l} = -(p Q_{1.1} + q Q_{1.2} + r Q_{1.3})$$

$$\frac{\partial k_2}{\partial l} = -(p Q_{1.2} + q Q_{2.2} + r Q_{2.3})$$

$$\frac{\partial k_3}{\partial l} = -(p Q_{1.3} + q Q_{2.3} + r Q_{3.3})$$

und wenn man diese Ausdrücke in (7) substituirt:

$$\frac{dF}{dl} = f - p(A Q_{1.1} + B Q_{1.2} + C Q_{1.3}) - q(A Q_{1.2} + B Q_{2.2} + C Q_{2.3}) - r(A Q_{1.3} + B Q_{2.3} + C Q_{3.3})$$

worin $A\ B\ C$ zur Abkürzung für die Summen $\left[\frac{pf}{g}\right]\ \left[\frac{qf}{g}\right]\ \left[\frac{rf}{g}\right]$ gesetzt sind. Bilden wir hiermit nun den Ausdruck (6), so entsteht nach leichter Reduction

$$\frac{\mu_F^2}{\mu^2} = \left[\frac{ff}{g}\right] - (A Q_{1.1} + B Q_{1.2} + C Q_{1.3}) M - (A Q_{1.2} + B Q_{2.2} + C Q_{2.3}) N - (A Q_{1.3} + B Q_{2.3} + C Q_{3.3}) R$$

worin bezeichnen MNR die Ausdrücke:

$$M = 2A - (pp)(A Q_{1.1} + B Q_{1.2} + C Q_{1.3}) - (pq)(A Q_{1.2} + B Q_{2.2} + C Q_{2.3}) - (pr)(A Q_{1.3} + B Q_{2.3} + C Q_{3.3})$$

$$N = 2B - (pq)(A Q_{1.1} + B Q_{1.2} + C Q_{1.3}) - (qq)(A Q_{1.2} + B Q_{2.2} + C Q_{2.3}) - (qr)(A Q_{1.3} + B Q_{2.3} + C Q_{3.3})$$

$$R = 2C - (pr)(A Q_{1.1} + B Q_{1.2} + C Q_{1.3}) - (qr)(A Q_{1.2} + B Q_{2.2} + C Q_{2.3}) - (rr)(A Q_{1.3} + B Q_{2.3} + C Q_{3.3})$$

welche mit Rücksicht auf die Systeme (8. 9. 10) übergehen in

$$M = A \quad N = B \quad R = C$$

womit wir erhalten:

$$(14) \quad \mu_F^2 = \mu^2 \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{ff}{g}\right] - \left[\frac{pf}{g}\right]^2 Q_{1.1} - 2\left[\frac{pf}{g}\right]\left[\frac{qf}{g}\right] Q_{1.2} - \left[\frac{qf}{g}\right]^2 Q_{2.2} \\ -2\left[\frac{pf}{g}\right]\left[\frac{rf}{g}\right] Q_{1.3} - 2\left[\frac{qf}{g}\right]\left[\frac{rf}{g}\right] Q_{2.3} - \left[\frac{rf}{g}\right]^2 Q_{3.3} \end{array} \right\}$$

oder nach derselben Symbolik wie bei den Normalgleichungen abgekürzt:

$$(14^*) \qquad \mu_F^2 = \mu^2 \{ \mathrm{I} - \mathrm{II} \}$$

wofür

$$(15) \quad \mathrm{I} = (ff)$$

$$(16) \quad \mathrm{II} = (pf)^2 Q_{1.1} + 2(pf)(qf) Q_{1.2} + (qf)^2 Q_{2.2} + 2(pf)(rf) Q_{1.3} + 2(qf)(rf) Q_{2.3} + (rf)^2 Q_{3.3}$$

Auch dieser Ausdruck lässt sich noch umwandeln genau in derselben Weise wie in §. 19. aus dem Ausdruck (11) der Ausdruck (13) mit (14) abgeleitet worden ist. Man erhält darnach:

$$(17) \qquad \mathrm{II} = \frac{(pf)^2}{(pp)} + \frac{(qf.1)^2}{(qq.1)} + \frac{(rf.2)^2}{(rr.2)}$$

worin

$$(18) \qquad \begin{array}{l} (qf.1) = (qf) - \alpha_1'(pf) \\ (rf.2) = (rf) - \beta_2'(qf.1) - \beta_1'(pf) \end{array}$$

und $\alpha' \beta'$ die bei der Auflösung der Normalgleichungen sich bildenden bekannten Coefficienten sind. (§. 17. VI.)

Auch kann man die Zähler des Ausdrucks II in (17) finden, indem man aus dem Schema

(19)

(pp)	(pq)	(pr)	(pf)
(pq)	(qq)	(qr)	(qf)
(pr)	(qr)	(rr)	(rf)

mit Hülfe der Auflösung der Normalgleichungen nach dem Gauss'schen Algorithmus übergeht zu:

(20)

(pp)	(pq)	(pr)	(pf)
	$(qq.1)$	$(qr.1)$	$(qf.1)$
		$(rr.2)$	$(rf.2)$

Will man den mittlern Fehler einer ausgeglichenen Beobachtungsgrösse z. B. von $l_1 + \lambda_1$ berechnen, so ist zu setzen

$$f_1 = 1 \quad f_2 = f_3 = \ldots = 0$$

und im Weiteren ganz wie im Allgemeinen zu verfahren.

IV. Wahl des Ausgleichungsverfahrens. Wir sahen oben, dass die Ausgleichung bedingter Beobachtungen in die vermittelnder Beobachtungen umgesetzt werden kann. Ohne Weiteres leuchtet auch das Umgekehrte ein. Jedenfalls wird man den bequemsten Rechnungsweg wählen und es ist dabei hauptsächlich die Mühe der Auflösung der Normalgleichungen zu veranschlagen. Bei n Beobachtungen und r Gleichungen zwischen denselben hat man nach der Methode der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen $(n - r)$ Normalgleichungen, bei der symmetrischen Ausgleichung bedingter Beobachtungen aber r Normalgleichungen, man wird daher, abgesehen von andern Gründen, nach vermittelnden oder bedingten Beobachtungen ausgleichen, je nachdem $n - r \lessgtr r$ d. i. $n \lessgtr 2r$ ist.

Doch ist zu beachten, ob nicht die zwar grössere Anzahl Normalgleichungen einfachere und häufiger verschwindende Coefficienten zeigen und darum schliesslich leichter als das minderzählige System aufzulösen sein würde.

Auch auf die Mühe der Gewichtsberechnung ist die Vergleichung beider Verfahren im speciellen Falle zu erstrecken.

Eine besondere Reductionsrechnung aus einer Form der Aufgabe in die andere wird meist überflüssig, indem man in der Regel gleich bequem jede Form direct wird darstellen können. Dafür ist also keine Mühe zu veranschlagen.

§. 23.

Formelübersicht für die Ausgleichung bedingter Beobachtungen. Berechnung des mittlern Fehlers einer Beobachtung vom Gewicht 1. Nichtlineare Bedingungsgleichungen.

I. Setzt man für $r = 3$ Bedingungsgleichungen und $n = 4$ Beobachtungen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} w_1 &= p_0 + p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 + p_4 l_4 \\ w_2 &= q_0 + q_1 l_1 + q_2 l_2 + q_3 l_3 + q_4 l_4 \\ w_3 &= r_0 + r_1 l_1 + r_2 l_2 + r_3 l_3 + r_4 l_4 \end{aligned}$$

so werden die ersteren:

$$(2)\qquad \begin{aligned} p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2 + p_3 \lambda_3 + p_4 \lambda_4 + w_1 &= 0 \\ q_1 \lambda_1 + q_2 \lambda_2 + q_3 \lambda_3 + q_4 \lambda_4 + w_2 &= 0 \\ r_1 \lambda_1 + r_2 \lambda_2 + r_3 \lambda_3 + r_4 \lambda_4 + w_3 &= 0 \end{aligned}$$

und die Correlatengleichungen:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \lambda_1 g_1 &= k_1 p_1 + k_2 q_1 + k_3 r_1 \\ \lambda_2 g_2 &= k_1 p_2 + k_2 q_2 + k_3 r_2 \\ \lambda_3 g_3 &= k_1 p_3 + k_2 q_3 + k_3 r_3 \\ \lambda_4 g_4 &= k_1 p_4 + k_2 q_4 + k_3 r_4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} s_1 &= p_1 + q_1 + r_1 \\ s_2 &= p_2 + q_2 + r_2 \\ s_3 &= p_3 + q_3 + r_3 \\ s_4 &= p_4 + q_4 + r_4 \end{aligned}$$

ferner die Normalgleichungen:

$$(4)\qquad \begin{aligned} (pp)k_1 + (pq)k_2 + (pr)k_3 + w_1 &= 0 \\ (pq)k_1 + (qq)k_2 + (qr)k_3 + w_2 &= 0 \\ (pr)k_1 + (qr)k_2 + (rr)k_3 + w_3 &= 0 \\ \hline (ps)k_1 + (qs)k_2 + (rs)k_3 + [w] &= 0 \end{aligned}$$

oder schematisch

$$(4^*)\qquad \begin{array}{|c|c|c||c|} \hline (pp) & (pq) & (pr) & w_1 \\ \hline (pq) & (qq) & (qr) & w_2 \\ \hline (pr) & (qr) & (rr) & w_3 \\ \hline\hline (ps) & (qs) & (rs) & [w] \\ \hline \end{array}$$

worin

$$(pp) = \frac{p_1 p_1}{g_1} + \frac{p_2 p_2}{g_2} + \frac{p_3 p_3}{g_3} + \frac{p_4 p_4}{g_4}$$

$$(pq) = \frac{p_1 q_1}{g_1} + \frac{p_2 q_2}{g_2} + \frac{p_3 q_3}{g_3} + \frac{p_4 q_4}{g_4}$$

. . . . .

Die Auflösung von (4. 4*) erfolgt wie die der Normalgleichungen §. 17. Nach dem Gauss'schen Algorithmus insbesondere wird erhalten:

(4**)

(pp)	(pq)	(pr)	w_1
	$(qq.1)$	$(qr.1)$	$(w_2.1)$
		$(rr.2)$	$(w_3.2)$

II. Controlle durch doppelte Berechnung von $[\lambda\lambda g]$, einmal aus den einzelberechneten λ, ein andermal nach der Formel:

(5) $$[\lambda\lambda g] = -[wk]$$

welche eine vollständige Controlle der ganzen Rechnung gewährt und erhalten wird durch Multiplication der Gl. (3) mit den resp. λ und Addition aller unter Berücksichtigung der Gl. (2). Vergleicht man Schema (4*) mit dem Schema der Normalgleichungen für vermittelnde Beobachtungen und beachtet dabei die Relationen der w gegen die l nach den Gl. (1), so bemerkt man leicht, dass man wie in §. 14. aus (6) die Formel (9), jetzt aus (5) erhalten kann:

(5*) $$[\lambda\lambda g] = \frac{w_1^2}{(pp)} + \frac{(w_2.1)^2}{(qq.1)} + \frac{(w_3.2)^2}{(rr.2)}.$$

III. Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit wird gleich

(6) $$\mu = \mp\sqrt{\frac{[\lambda\lambda g]}{r}}$$

näherungsweise mit dem mittlern Fehler $\mp\frac{\mu}{\sqrt{2r}}$ (§. 15.).

Ferner ist für den Durchschnittsfehler:

(6*) $$\vartheta = \mp\frac{[\text{val. abs. } \lambda\sqrt{g}]}{\sqrt{nr}}.$$

Denken wir uns nämlich die Reduction auf vermittelnde Beobachtungen ausgeführt, so erhalten wir bei n Beobachtungsfehlern $\lambda \ldots n - r$ Unbekannte, daher ist in §. 15. (16. 19. 32) für $n - m$ einzuführen $n - (n - r)$ d. i. r.

IV. Der mittlere Fehler einer Function F der ausgeglichenen Beobachtungswerthe wird:

$$\mu_F = \mu \sqrt{\mathrm{I} - \mathrm{II}} \tag{7}$$

wobei

$$\mathrm{I} = (ff) = \frac{f_1 f_1}{g_1} + \frac{f_2 f_2}{g_2} + \frac{f_3 f_3}{g_3} + \frac{f_4 f_4}{g_4}$$

$$\mathrm{II} = \frac{(pf)^2}{(pp)} + \frac{(qf.1)^2}{(qq.1)} + \frac{(rf.2)^2}{(rr.2)}$$

und die f die partiellen Differentialquotienten der Function nach den resp. l bedeuten, u. A. aber

$$(pf) = \frac{p_1 f_1}{g_1} + \frac{p_2 f_2}{g_2} + \frac{p_3 f_3}{g_3} + \frac{p_4 f_4}{g_4}.$$

V. Sind die Bedingungsgleichungen nicht linear, so ändert dies nur den Anfang der Rechnung. Wird z. B. die erste Bedingungsgleichung durch

$$\varphi(l_1 + \lambda_1,\ l_2 + \lambda_2,\ l_3 + \lambda_3,\ l_4 + \lambda_4) = 0 \tag{8}$$

dargestellt, so berechne man

$$w = \varphi(l_1\, l_2\, l_3\, l_4) \tag{9}$$

und unter der Voraussetzung, dass höhere Potenzen der λ als die erste zu vernachlässigen sind, hat man alsdann nach dem Taylor'schen Satze:

$$p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + p_3\lambda_3 + p_4\lambda_4 + w_1 = 0 \tag{10}$$

wenn gesetzt werden:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l_1} = p_1 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial l_2} = p_2 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial l_3} = p_3 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial l_4} = p_4. \tag{11}$$

Beispiel 3*. Wir haben dasselbe bereits §. 5. S. 38. unter Annahme gleicher Gewichte behandelt, jetzt gleichen wir aus unter der Annahme, dass die Gewichte proportional den Repetitionszahlen seien (wozu wir wegen der bedeutenden Grösse derselben berechtigt sind, Beisp. 25.).

Wir haben nach (1)

$$\begin{array}{lll} & \sphericalangle H & 81^0\,21'\,43''.36 + \lambda_1 \quad \text{Gew. } 70 \\ (6) & \sphericalangle J & 25^0\,16'\,28''.85 + \lambda_2 \quad \text{„ } 101 \\ & \sphericalangle D & 73^0\,21'\,46''.35 + \lambda_3 \quad \text{„ } 85 \end{array}$$

Theoretische Winkelsumme $180^0\,0'\,0''.139$.

Daher ist die Bedingungsgleichung

$$(7) \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 1.579 = 0.$$

Die Correlatengleichungen sind

$$(8) \qquad 70\lambda_1 = k \quad 101\lambda_2 = k \quad 85\lambda_3 = k$$

und die Normalgleichung wird

$$\left(\tfrac{1^2}{70} + \tfrac{1^2}{101} + \tfrac{1^2}{85}\right) k - 1.579 = 0$$

oder

$$(9) \qquad 0.03595k - 1.579 = 0$$

also ist

$$(10) \qquad k = + 43.92$$

und

$$\begin{array}{lll} & 70\lambda_1 = + 43.92 & \lambda_1 = + 0.627 \\ (11) & 101\lambda_2 = + 43.92 & \lambda_2 = + 0.435 \\ & 85\lambda_3 = + 43.92 & \lambda_3 = + 0.517 \end{array}$$

Die ausgeglichenen Beobachtungswerthe sind nach (6) ferner

$$\begin{array}{ll} & \sphericalangle H = 81^0\,21'\,43''.987 \\ (12) & \sphericalangle J = 25^0\,16'\,29''.285 \\ & \sphericalangle D = 73^0\,21'\,46''.867 \end{array}$$

und deren Summe gleich $180^0\,0'\,0''.139$. Ferner hat man aus (11)

$$(13) \quad [\lambda\lambda g] = 43.92(0.627 + 0.435 + 0.517) = 69.35,$$

dagegen nach Formel (5) dieses §.

$$(13^*) \qquad [\lambda\lambda g] = \frac{(1.579)^2}{0.03595} = 1.579 \times 43.92 = 69.35$$

also mit (13) in genügender Uebereinstimmung.

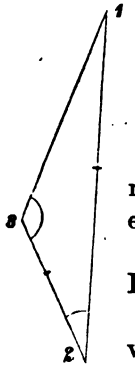
Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit d. h. einer einfachen Winkelbeobachtung wird

$$(14) \qquad \mu = \mp\sqrt{\frac{69.35}{1}} = \mp 8''.32$$

und der mittlere Fehler dieser Bestimmung $\mp 5''.89$, sodass

der Werth von μ im Mittel zwischen ∓ 2.43 und ∓ 14.21 schwankt.

Beispiel 11. In einem Dreiecke 1. 2. 3. sind gemessen



$$\left.\begin{aligned} \sphericalangle 2 &= 33^0\ 22'\ 42'' \mp 20'' \\ \sphericalangle 3 &= 125\ \ 42\ \ 11 \mp 20'' \\ \text{Seite } 2.3 &= 103^m.67 \quad \mp 0.05 \\ \text{,, } \ 1.2 &= 235\,.\,83 \quad \mp 0.05 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Die hier beigefügten mittlern Fehler wurden nur durch Schätzung ermittelt, sind auch eher etwas zu gross als zu klein angegeben.

Es sind nun die plausibelsten Dimensionen des Dreiecks zu bestimmen.

Die vier gegebenen Stücke sind aber so zu verbessern, dass sie die Bedingungsgleichung

$$(2) \qquad \frac{2.3}{1.2} = \frac{\sin 1}{\sin 3} = \frac{\sin (2+3)}{\sin 3}$$

erfüllen. Nennen wir aber die resp. Verbesserungen der vier Stücke (1) resp. $\lambda_1\ \lambda_2$ und $\lambda_3\ \lambda_4$, erstere in Minuten, letztere in Metern ausgedrückt, so wird aus (2)

$$(3) \qquad \frac{103.67 + \lambda_3}{235.83 + \lambda_4} = \frac{\sin (159^0\ 4'\ 53'' + \lambda_1 + \lambda_2)}{\sin (125^0\ 42'\ 11'' + \lambda_2)}.$$

Logarithmirt man, so ergiebt sich nach einfacher Reduction:

$$(4) \qquad \begin{aligned} &9.64305.7 + 0.00418\,\lambda_3 - 0.00184\,\lambda_4 \\ &= 9.64313.8 - 0.000331\,\lambda_1 - 0.000241\,\lambda_2 \end{aligned}$$

oder

$$(5) \qquad -33.1\,\lambda_1 - 24.1\,\lambda_2 - 418\,\lambda_3 + 184\,\lambda_4 + 8.1 = 0$$

Wir bilden nun die Hülfsgrössen g (§. 10. II) wie folgt. Es sind die reciproken Werthe der Quadrate der in derselben Einheit wie die betreffenden λ ausgedrückten mittlern Fehler:

für die Winkel gleich 9 . . . für die Seiten gleich 400

wofür wir zu grösserer Einfachheit setzen:

für die Winkel gleich 10 . . . für die Seiten gleich 400.

Wir rechnen nun

(6) für die Winkel ... $g_1 = g_2 = 1$
für die Seiten ... $g_3 = g_4 = 40$

Die Correlatengleichungen und die Normalgleichungen werden:

(7) $\lambda_1 = -33.1k \qquad \lambda_2 = -24.1k$
$40\,\lambda_3 = -418k \qquad 40\,\lambda_4 = +184k$

(8) $6891k + 8.1 = 0 \qquad k = -0.001175.$

Daher ist

(9) $\lambda_1 = +0'.0389 \qquad \lambda_2 = +0'.0283$
$40\,\lambda_3 = +0^m.491 \qquad 40\,\lambda_4 = -0^m.216$
$\lambda_3 = +0^m.0123 \qquad \lambda_4 = -0^m.0054$

also

(10) $[\lambda\lambda g] = 0.00952$

letzteres übereinstimmend mit der Berechnung aus (8), wonach $[\lambda\lambda g] = (8.1)^2 : 6891 = 0.00952$.

Zu $g = 1$ gehört zufolge der Ausgleichung 0.00952 als mittleres Fehlerquadrat, und somit wird

(11) M. F. der Winkelbeob. $= \mp\sqrt{0.00952} = \mp 0'.10 = \mp 6''$
„ „ „ Seitenbeob. $= \mp\sqrt{\frac{0.00952}{40}} = \mp 0^m.015$

jedoch ist diese Bestimmung sehr unsicher, daher eine Uebereinstimmung mit den Schätzungen in (1) nicht zu erwarten.

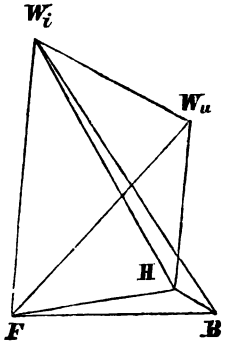
Die definitiven Dreiecksdimensionen werden endlich

(12) Seite $2.3 = 103^m.682 \qquad \sphericalangle 1 = 20^0\,55'\,3''$
„ $1.3 = 159^m.775 \qquad \sphericalangle 2 = 33^0\,22'\,44''$
„ $1.2 = 235^m.825 \qquad \sphericalangle 3 = 125^0\,42'\,13''$

Wir überlassen es dem Leser, die Gewichte und mittlern Fehler dieser Grössen nach IV. d. §. zu berechnen.

Beispiel 12. Ausgleichung eines Fünfecks der Hannoverschen Vermessung von Gauss. (Supplem. theoriae combinationis etc. 1826.)

Das Ergebniss der Stationsausgleichungen war:



(1) Station Falkenberg:

0. Wilsede 187° 47′ 30″.311
1. Wulfsode 225 9 39.676
2. Hauselberg 266 13 56.239
3. Breithorn 274 14 43.634

(2) Station Breithorn:

4. Falkenberg 94° 33′ 40″.755
5. Hauselberg 122 51 23.054
6. Wilsede 150 18 35.100

(3) Station Hauselberg:

7. Falkenberg 86° 29′ 6″.872
8. Wilsede 154 37 9.624
9. Wulfsode 189 2 56.376
10. Breithorn 302 47 37.732

(4) Station Wulfsode:

11. Hauselberg 9° 5′ 36″.593
12. Falkenberg 45 27 33.556
13. Wilsede 118 44 13.159

(5) Station Wilsede:

14. Falkenberg 7° 51′ 1″.027
15. Wulfsode 298 29 49.519
16. Breithorn 330 3 7.392
17. Hauselberg 334 25 26.746

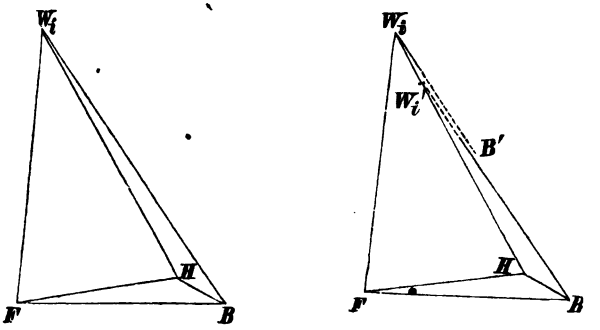
Gegeben ist ferner: Wilsede-Wulfsode = 22877^m.94.

Für jede Station sind diese Angaben als das Ergebniss einer einzigen Beobachtungsreihe aufzufassen, die aber mit grosser und für alle Stationen gleicher Genauigkeit angestellt wurde. Die Angaben sind ferner so, dass sie zugleich die südwestlichen Azimute der betreffenden Seiten (näherungsweise) bezeichnen — für unsere Aufgabe selbst aber haben nur die Differenzen der Richtungsangaben In-

teresse. Wir suchen nun die Verbesserungen der letzteren, sodass die Differenzen der corrigirten Richtungsangaben die Bedingungsgleichungen erfüllen. Jede Verbesserung werde mit der in Parenthese geschlossenen Nummer der Richtung bezeichnet, z. B. also die corrigirte Richtung auf Wilsede nach Falkenberg mit $7^0\,51'\,1''.027 + (14)$.

Aus der Anzahl der beobachteten Richtungen und der Anzahl der zur Construction nöthigen Richtungen findet sich, dass 7 überschüssige Messungen vorhanden sind, die Richtungsbeobachtungen mithin 7 Bedingungsgleichungen erfüllen müssen. (Vergl. Beisp. 26.)

Betrachten wir einstweilen das Netz als auf einer Ebene liegend, so muss zunächst im Viereck W_iHFB die Winkelsumme jedes der 3 Dreiecke W_iHF, FHB und W_iBH gleich 180^0 werden. Sind diese 3 Bedingungen erfüllt, so wird, wie ein Blick auf die Figur zeigt, auch die Winkel-



summe von FW_iB, welches die Summe der erstern 3 Dreiecke ist, gleich 180^0. Indessen ist damit die Anzahl der Bedingungsgleichungen nicht erschöpft. Denken wir uns nämlich die Dreiecke W_iHF und FHB den beiden ersten Bedingungsgl. entsprechend angenommen, so wird für Dr. W_iBH (und damit auch für Dr. FW_iB) die beobachtete Winkelsumme schon Null, wenn nur die Visuren von W_i nach B und von B nach W_i parallel laufen. Sie sollen aber zusammenfallen und dies lässt sich dadurch ausdrücken, dass W_i mit W_i', dem Punkte, wo die fehlerhafte Richtung von B nach W_i die Seite HW_i trifft, zusammenfallen soll.

Es ist aber einerseits

$$HW_i' = HB \frac{\sin HBW_i'}{\sin BW_i'H}$$

andrerseits

$$HW_i = FH \frac{\sin W_iFH}{\sin HW_iF} = HB \frac{\sin FBH}{\sin HFB} \frac{\sin W_iFH}{\sin HW_iF}$$

daher die Bedingung, dass $HW_i = HW_i'$ werde:

$$(6) \qquad \frac{\sin HBW_i'}{\sin BW_i'H} \frac{\sin HFB}{\sin FBH} \frac{\sin HW_iF}{\sin W_iFH} = 1.$$

Dies ist die vierte Bedingungsgleichung des Vierecks, und man nennt sie eine „Seitenbedingungsgleichung" zum Unterschied gegen die drei vorhergehenden „Winkelbedingungsgleichungen".

Drücken wir in (6) die Winkel durch ihre Richtungen aus, so wird diese Gleichung (wobei zu beachten, dass Winkel $BW_i'H = B'W_iH$ wegen BW_i' parallel W_iB')

$$(7) \qquad \frac{\sin(6-5)}{\sin(17-16)} \frac{\sin(3-2)}{\sin(5-4)} \frac{\sin(14-17)}{\sin(2-0)} = 1.$$

Berücksichtigen wir jetzt auch, dass das Netz nicht auf einer Ebene, sondern auf einer Kugelfläche liegt, so ändert sich an der vorhergehenden Betrachtung nur das, dass die Winkelsumme der Dreiecke $= 180 +$ Excess wird und an Stelle der Bedingung $HW_i = HW_i'$ folgende tritt:

$$\sin HW_i = \sin HW_i',$$

womit aber dieselbe Bedingungsgleichung wie oben resultirt.

Wir haben nun für Dreieck W_iHF

$$\begin{aligned}
\sphericalangle F &= 78^0\,26'\,25''.928 - (0) + (2)\\
\sphericalangle H &= 68\ \ 8\ \ 2.752 - (7) + (8)\\
\sphericalangle W_i &= 33\ 25\ 34.281 + (14) - (17)\\
\text{Summe} &= 180\ \ 0\ \ 2.961 - (0) + (2) - (7) + (8) + (14) - (17)\\
\text{Theor. S.} &= 180\ \ 0\ \ 1.919
\end{aligned}$$

daher

$$(8) \quad 0 = + 1.042 - (0) + (2) - (7) + (8) + (14) - (17).$$

Ebenso wird für FHB (sph. Exc. $= 0.202$)

$$(9) \quad 0 = - 1.368 - (2) + (3) - (4) + (5) + (7) - (10)$$

und für $W_i BH$ (sph. Exc. = 0.321)

(10) $0 = -0.813 - (5) + (6) - (8) + (10) - (16) + (17).$

Die Seitenbedingungsgleichung giebt logarithmirt

$$\left.\begin{array}{l} \log\sin(27^0\,27'\,12''.046 + (6) - (5)) \\ + \log\sin(\ 8^0\ \ 0'\ 47''.395 + (3) - (2)) \\ + \log\sin(33^0\,25'\,34''.281 + (14) - (17)) \\ - \log\sin(\ 4^0\,22'\,19''.354 + (17) - (16)) \\ - \log\sin(28^0\,17'\,42''.299 + (5) - (4)) \\ - \log\sin(78^0\,26'\,25''.928 + (2) - (0)) \end{array}\right\} = 0$$

und daraus folgt, Alles in Einheiten der 7. Decimale der Logarithmen ausgedrückt:

(11) $0 = +25 + 4.3(0) - 153.9(2) + 149.6(3) + 39.1(4)$
$- 79.6(5) + 40.5(6) + 31.9(14) + 275.4(16) - 307.3(17).$

Das Viereck $FW_i W_u H$ giebt ebenfalls 3 Winkel- und eine Seitenbedingungsgleichung, doch reduciren sich erstere auf 2, da für Dr. FHW_i schon im vorhergehenden Viereck die Winkelsumme gleich dem theoretischen Werth gesetzt worden ist. Die beiden neuen Winkelgleichungen entnehmen wir aus Dr. FHW_u und $HW_u W_i$ mit den sphärischen Excessen 1.257 1.295 und den Widersprüchen + 1".773 — 0".750, sowie die Seitengleichung durch Doppelberechnung von HW_u, ein Mal aus FH und Dr. FHW_u, sodann aus FH und den Dreiecken FHW_i und $W_i HW_u$. Man findet

(12) $$\frac{\sin W_u FH}{\sin HW_u F} \cdot \frac{\sin HW_i F}{\sin W_i FH} \cdot \frac{\sin HW_u W_i}{\sin W_u W_i H} = 1.$$

Der Widerspruch w dieser wie oben umgeformten Gleichung ist (—3).

Wir stellen nun alle 7 Gleichungen zusammen, multipliciren aber vorher die Winkelgleichungen mit 100, um nicht zu verschiedene Werthe der Correlaten k zu erhalten, was immer eintritt, wenn die Coefficienten aller Verbesserungen in einzelnen Gleichungen sehr klein im Vergleich zu denen andrer Gleichungen sind.

Die Summe aller Bedingungsgleichungen wurde einfach durch Addition gebildet.

	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1	·	·	−100	+100	−100	+100	·
2	·	−100	+100	·	·	·	·
3	−100	·	+100	·	·	·	·
4	·	·	·	·	·	−100	+100
5	·	·	·	·	·	·	·
6	+4.3	·	−153.9	+149.6	+39.1	−79.6	+40.5
7	+4.3	−24.2	+19.9	·	·	·	·
Sa.	−91.4	−124.2	−34.0	+249.6	−60.9	−79.6	+140.5

(13)

(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
+100	·	·	−100	·	·
−100	·	+100	·	−100	+100
−100	+100	·	·	·	·
·	−100	·	+100	·	·
·	−100	+100	·	−100	·
·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	+ 36.1	−28.6
−100	−100	+200	·	−163.9	+71.4

(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	w	
·	·	·	·	·	−136.8	= 0
·	·	·	·	·	+177.3	= 0
·	+100	·	·	−100	+104.2	= 0
·	·	·	−100	+100	− 81.3	= 0
+100	·	−100	·	+100	− 75.0	= 0
·	+ 31.9	·	+275.4	−307.3	+ 25.	= 0
− 7.5	+ 31.9	+29.1	·	− 61.0	− 3.	= 0
+92.5	+163.8	−70.9	+175.4	−268.3	+ 10.4	= 0

(14) Hieraus folgen die Normalgleichungen:

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	w	
+60000	−20000	−20000	−20000	.	+ 18480	− 1990	−136.8	− 8.836
−20000	+60000	+20000	.	+20000	− 15390	− 2060	+177.3	+13.092
−20000	+20000	+60000	−20000	−20000	+ 18100	+10850	+104.2	− 0.260
−20000	.	−20000	+60000	+20000	− 46260	− 6100	− 81.3	+ 7.895
.	+20000	−20000	+20000	+60000	− 30730	−13370	− 75.0	+ 3.899
+18480	−15390	+18100	−46260	−30730	+226884	+16719	+ 25.0	−40.133
− 1990	− 2060	+10850	− 6100	−13370	+ 16719	+ 8763	− 3.0	+11.002
+16490	+62550	+48950	−12360	+35900	+187804	+12812	+ 10.4	−13.341

Die Zahlen rechts vom dreifachen Strich sind Summen $[pf]$ $[qf]$ $[rf]$ ... (§. 22. 19) für eine Function der Beobachtungsgrössen, von der später die Rede sein wird.

Die Auflösung nach Verfahren II §. 17. ergiebt das Doppeltableau:

(15)

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7		
+60000	−20000	−20000	−20000	.	+ 18480	− 1990	− 136.8	− 8.836
1	−0.33333	−0.33333	−0.33333	.	+ 0.30800	−0.03317	−0.002280	−0.00014727
	+53333	+13333	− 6667	+20000	− 9230	− 2723	+131.7	+ 10.147
	1	+0.25000	−0.12500	+0.37500	− 0.17306	−0 05106	+0.002469	+0.00019026
		+50000	−25000	−25000	+ 26568	+10868	+ 25.7	− 5.742
		1	−0.50000	−0.50000	+ 0.53136	+0.21736	+0.000514	−0.00011481
			+40000	+10000	− 27970	− 1669	− 97.6	+ 3.347
			1	+0.25000	− 0.69925	−0.04173	− 0.002440	+0.00008368
				+37500	− 6992	− 6498	− 87.2	− 3.614
				1	− 0.18646	−0.17328	−0.002325	−0.00009638
					+184616	+ 8707	− 8.3	− 30.938
					1	+0.04716	−0.000045	−0.00016758
						+ 4589	− 2.52	+ 13.448
						1	− 0.00549	+ 0.0029305

Hieraus folgen die Werthe

$$
\begin{aligned}
k_1 &= +\ 0.00224.6 \\
k_2 &= -\ 0.00344.1 \\
k_3 &= +\ 0.00088.2 \\
k_4 &= +\ 0.00170.9 \\
k_5 &= +\ 0.00323.6 \\
k_6 &= -\ 0.00021.4 \\
k_7 &= +\ 0.00549:
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Die Verbesserungen λ ergeben sich mit Hülfe der Correlatengleichungen, die sich aus den Bedingungsgleichungen leicht ableiten lassen und die wir daher nur für eine Station anführen:

$$
\begin{cases}
(0) = & . & . & -100k_3 & . & . & +\ 4.3k_6 + 4.3k_7 \\
(1) = & . & -100k_2 & . & . & . & -24.2k_7 \\
(2) = & -100k_1 & +100k_2 & +100k_3 & . & . & -153.9k_6 + 19.9k_7 \\
(3) = & +100k_1 & . & . & . & . & +149.6k_6 \quad .
\end{cases}
\tag{17}
$$

wie folgt:

$$
\begin{aligned}
(0) &= -\ 0''.065 \\
(1) &= +\ 0''.213 \\
(2) &= -\ 0''.339 \\
(3) &= +\ 0''.193 \\
(4) &= -\ 0''.233 \\
(5) &= +\ 0''.070 \\
(6) &= +\ 0''.163 \\
(7) &= +\ 0''.481 \\
(8) &= -\ 0''.407 \\
(9) &= -\ 0''.021 \\
(10) &= -\ 0''.053 \\
(11) &= +\ 0''.219 \\
(12) &= -\ 0''.502 \\
(13) &= +\ 0''.282 \\
(14) &= +\ 0''.256 \\
(15) &= -\ 0''.164 \\
(16) &= -\ 0''.230 \\
(17) &= +\ 0''.138
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Man hat weiter:

$$[\lambda\lambda] = 1.230. \tag{19}$$

Dagegen giebt die Berechnung aus dem Doppeltableau (15)

$[\lambda\lambda] = 136.8 \times 0.002280 + 131.7 \times 0.002469$ etc. $= 1.2303$ in guter Uebereinstimmung.

Der mittlere Fehler einer Richtung der Stationsausgleichung ergiebt sich zu:

$$(20) \qquad \mu = \sqrt{\frac{1.230}{7}} = \mp 0''{,}419$$

und näherungsweise ist der mittlere zu befürchtende Fehler dieser Bestimmung gleich

$$(21) \qquad \mp \frac{0.419}{\sqrt{2 \times 7}} \text{ d. i. } \mp 0.112.$$

Die Summe der absoluten Werthe der λ ist 4.029, daher der Durchschnittsfehler

$$(22) \qquad \vartheta = \mp \frac{4.029}{\sqrt{18 \times 7}} = \mp 0''.359$$

also ist hier

$$(23) \qquad \mu = 1.17\vartheta.$$

Wir berechnen ferner die Seite FB nebst dem mittleren Fehler ihrer Bestimmung, wobei wir Seite $W_i W_u$ als fehlerfrei betrachten wollen. Es ist mit Berücksichtigung des sphärischen Excesses und Anwendung des Legendre'schen Satzes:

$$(24) \quad FB = 22877^m.94 \, \frac{\sin(F W_u W_i - 0.652)}{\sin(W_i F W_u - 0.652)} \, \frac{\sin(B W_i F - 0.814)}{\sin(F B W_i - 0.814)}$$

und hierin Winkel

$$(25) \quad \begin{aligned} F W_u W_i - 0.652 &= 73^0\ 16'\ 38''.951 - (12) + (13) \\ &= 73^0\ 16'\ 39''.735 \\ W_i F W_u - 0.652 &= 37^0\ 22'\ 8''.713 - (0) + (1) \\ &= 37^0\ 22'\ 8''.991 \\ B W_i F - 0.814 &= 37^0\ 47'\ 52''.821 + (14) - (16) \\ &= 37^0\ 47'\ 53''.307 \\ F B W_i - 0.814 &= 55^0\ 44'\ 53''.531 - (4) + (6) \\ &= 55^0\ 44''\ 53''.927 \end{aligned}$$

Damit ergiebt sich

$$(26) \qquad FB = 26766.67 \text{ resp. } 26766.70$$

ohne „ mit

Berücksichtigung der Verbesserungen nach der Ausgleichung.

Man findet ferner aus (24):

$$(27)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial(FB)}{\partial(13)} &= -\frac{\partial(FB)}{\partial(12)} = +0.03899 \\ \frac{\partial(FB)}{\partial(0)} &= -\frac{\partial(FB)}{\partial(1)} = +0.16991 \\ \frac{\partial(FB)}{\partial(14)} &= -\frac{\partial(FB)}{\partial(16)} = +0.16731 \\ \frac{\partial(FB)}{\partial(4)} &= -\frac{\partial(FB)}{\partial(6)} = +0.08836 \end{aligned}$$

Diese Differentialquotienten sind die f in der früheren Bezeichnung und es folgt als Summe der Producte der f und derjenigen Coefficienten der 1. Bedingungsgl., die sich auf die gleiche Richtung beziehen

$$[pf] = -100 \times 0.08836 = -8.836.$$

Für die zweite bis sechste der Bedingungsgleichungen werden die Productsummen $[qf]$ $[rf]$ u. s. f.

$$+13.092, -0.260, +7.895, +3.899, -40.133$$

und für die siebente endlich:

$$(4.3 + 24.2)\,0.16991 + (28.6 - 7.5)\,0.03899 + 31.9 \times 0.16731 = 11.002.$$

Die Summe aller d. i. — 13.341 stimmt mit der aus der Summenbedingungsgleichung berechneten Summe $[sf]$ überein.

Durch die Auflösung der Normalgleichung haben wir nun die zur Berechnung des reciproken Gewichts nöthigen Grössen bereits erhalten.

Ist (§. 23. 7)

$$\mu_{FB} = \mu\sqrt{\mathrm{I} - \mathrm{II}}$$

so giebt das Doppeltableau (15) für II den Ausdruck

$$8.836 \times 0.00014727 + 10.147 \times 0.00019026 + 5.742 \times 0.00011484 \text{ u. s. f.}$$

$$\text{d. i. } \mathrm{II} = 0.049114.$$

Dagegen ist I gleich

$$2\,\{0.03899^2 + 0.16991^2 + 0.16701^2 + 0.08836^2\}$$

$$\text{d. i. } \mathrm{I} = 0.132380$$

mithin wird das Quadrat des mittlern Fehlers von dem ohne Rücksicht auf die Ausgleichung berechneten Werthe 26766.67 von FB gleich

(28) $\mu\sqrt{0.132380}$ d. i. $\mp 0^m.152$

dagegen des mit Rücksicht auf die Ausgleichung berechneten Werthes $26766^m.70$ von FB gleich

(29) $\mu\sqrt{0.132380 - 0.049114}$ d. i. $\mp 0^m.121$.

Die Gauss'schen Rechnungsergebnisse stimmen im Allgemeinen mit dem hier Gefundenen bis auf Kleinigkeiten überein, nur für den ausgeglichenen Werth von FB giebt Gauss (Uebersetzung von J. Bertrand) wesentlich abweichend 26766.68 (?).

§. 24.

Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen, von deren Unbekannten Bedingungsgleichungen zu erfüllen sind, durch Reduction auf vermittelnde Beobachtungen. Directes Verfahren.

I. Reduction auf vermittelnde Beobachtungen. Die Aufgabe ist einleitungsweise in §. 5. IV besprochen worden. Wir beziehen uns darauf.

Unter Umständen kann nun die Ausgleichung mit Vortheil dadurch geschehen, dass man die r Bedingungsgleichungen benutzt, um r Unbekannte aus den, den vermittelnden Beobachtungen entsprechenden Fehlergleichungen zu eliminiren, welche alsdann $m - r$ Unbekannte enthalten und in gewöhnlicher Weise auszugleichen sind.

Zur Erläuterung diene das fingirte **Beispiel 13.** Seien die Fehlergleichungen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 + x + y + z \quad \text{Gew. } 1 \\ \lambda_2 &= -1 + 2x - 3y \quad \text{,,} \\ \lambda_3 &= -2 + z \quad \text{,,} \end{aligned} \tag{1}$$

und die Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= +1 + x + y + z \\ 0 &= -3 + y - z \end{aligned} \tag{2}$$

so hat man leicht aus letzteren

$$\begin{aligned} z &= y - 3 \\ x &= -2y + 2 \end{aligned} \tag{3}$$

womit die Gl. (1) geben

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -2 \\ \lambda_2 &= +3 - 7y \\ \lambda_3 &= -5 + y \end{aligned} \qquad (4)$$

Die erste Gleichung enthält y nicht mehr und erscheint daher λ_1 als ein wahrer Beobachtungsfehler.

Die Normalgleichung für das System (4) vermittelnder Beobachtungen wird ferner:

$$50y = 26,$$

$$y = +0.52 \quad \mu_y{}^2 = 0.02\mu^2 \quad \text{Gew. } 50$$

Damit ist nach (3)

$$\left.\begin{aligned} z &= -2.48 \quad \mu_z{}^2 = 0.02\mu^2 \quad ,, \quad 50 \\ x &= +0.96 \quad \mu_x{}^2 = 0.08\mu^2 \quad ,, \quad 12.5 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Die Fehler λ_2 und λ_3 werden resp. -0.64 -4.48 und die Summe ihrer Quadrate 20.48. Dasselbe ergiebt die indirecte Rechnung aus $[ll]$, welche Summe hier 34 ist; man hat danach

$$\lambda_2{}^2 + \lambda_3{}^2 = 34 - \frac{26^2}{50} = 20.48.$$

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ergiebt sich zu

$$\mu = \mp \sqrt{\frac{20.48}{2-1}} = \mp 4.53. \qquad (6)$$

Dem ursprünglichen Charakter der Aufgabe mehr entsprechend ist es übrigens, bei der Berechnung von μ auch λ_1 zu berücksichtigen. Man hat alsdann

$$\mu = \mp \sqrt{\frac{24.48}{3-1}} = \mp 3.50. \qquad (7)$$

II. Directes Verfahren. Seien gegeben die Fehlergleichungen und Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + a_1x + b_1y + c_1z \quad \text{Gew. } g_1 \\ \lambda_2 &= -l_2 + a_2x + b_2y + c_2z \quad ,, \quad g_2 \\ \lambda_3 &= -l_3 + a_3x + b_3y + c_3z \quad ,, \quad g_3 \\ \lambda_4 &= -l_4 + a_4x + b_4y + c_4z \quad ,, \quad g_4 \end{aligned} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} 0 &= p_0 + p_1x + p_2y + p_3z \\ 0 &= q_0 + q_1x + q_2y + q_3z \end{aligned} \qquad (2)$$

Die Bedingungen des Minimum für $[\lambda\lambda g]$ mit Rücksicht auf (2) lassen sich (analog §. 22. II) aus dem Ausdrucke

$$[\lambda\lambda g] - 2k_1(p_0 + p_1x + p_2y + p_3z) - 2k_2(q_0 + q_1x + q_2y + q_3z)$$

durch Differentiation nach $x\ y\ z$ entwickeln. Wir schlagen indessen einen andern Weg ein und setzen an Stelle der (2) die Fehlergleichungen

$$(2^*) \qquad \begin{aligned} \lambda_5 &= p_0 + p_1x + p_2y + p_3z \quad \text{Gew. } g_5 \\ \lambda_6 &= q_0 + q_1x + q_2y + q_3z \quad \text{,, } g_6 \end{aligned}$$

wodurch das Problem der Ausgleichung auf dasjenige für vermittelnde Beobachtungen zurückgeführt ist. Die Normalgleichungen in der Form (6) §. 11. lauten nun:

$$(3) \qquad \begin{aligned} 0 &= [\lambda a g] + p_1\lambda_5 g_5 + q_1\lambda_6 g_6 \\ 0 &= [\lambda b g] + p_2\lambda_5 g_5 + q_2\lambda_6 g_6 \\ 0 &= [\lambda c g] + p_3\lambda_5 g_5 + q_3\lambda_6 g_6 \end{aligned}$$

Für $\lambda_1 \ldots \lambda_4$ führen wir die Werthe (1) ein, unterlassen dies aber für λ_5 und λ_6, setzen dagegen

$$(4) \qquad \lambda_5 g_5 = k_1 \quad \lambda_6 g_6 = k_2$$

und fügen den so umgeformten Normalgleichungen die Bedingungsgleichungen (2) bei, wodurch λ_5 und λ_6 gleich Null gesetzt werden. Obgleich k_1 und k_2 die Factoren λ_5, λ_6 enthalten, verschwinden sie doch keineswegs im Allgemeinen ebenfalls, weil gleichzeitig die andern Factoren g_5 und g_6 unendlich gross werden. In der That erhalten $k_1\ k_2$ endliche Werthe, wie sich aus der Betrachtung des folgenden Gleichungssystemes sofort ergiebt:

$$(5) \qquad \begin{aligned} (aa)x + (ab)y + (ac)z + p_1k_1 + q_1k_2 &= (al) \\ (ab)x + (bb)y + (bc)z + p_2k_1 + q_2k_2 &= (bl) \\ (ac)x + (bc)y + (cc)z + p_3k_1 + q_3k_2 &= (cl) \\ p_1x + p_2y + p_3z \quad . \quad . &= -p_0 \\ q_1x + q_2y + q_3z \quad . \quad . &= -q_0 \end{aligned}$$

welches wir das Normalgleichungssystem nennen wollen, da es ganz den früheren Systemen dieser Art entspricht, abgesehen von dem unwesentlichen Umstande des Verschwin-

dens einiger quadratischer Coefficienten. Die Auflösung nach $x\ y\ z\ k_1\ k_2$ kann nach §. 17. erfolgen.

Die Entwicklung der Formeln für die reciproken Gewichte der Unbekannten $x\ y\ z$ und von Functionen derselben erfolgt ebenfalls ganz in der Weise der §§. 11. und 19. und man erhält in der üblichen Bezeichnungsweise

$$(6) \qquad \mu_x^2 = \mu^2 Q_{1.1} \quad \mu_y^2 = \mu^2 Q_{2.2} \quad \mu_z^2 = \mu^2 Q_{3.3}$$

$$(7) \qquad \mu_{k_1}^2 = \mu^2(-Q_{4.4}) \quad \mu_{k_2}^2 = \mu^2(-Q_{5.5})$$

$$(8) \qquad \mu_F^2 = \mu^2 \{F_1^2 Q_{1.1} + 2F_1F_2Q_{1.2} + F_2^2 Q_{2.2} + 2F_1F_3Q_{1.3} + 2F_2F_3Q_{2.3} + F_3^2 Q_{3.3}\}$$

und ist hierbei nur zu (7) zu bemerken, dass $(-Q_{4.4})$, $(-Q_{5.5})$ positive Grössen sind, $Q_{4.4}$ $Q_{5.5}$ also negative Grössen, was in dem Fehlen der Coefficienten in der vierten und fünften der Gl. (5) seinen Grund hat. Bilden wir nach dem Gauss'schen Algorithmus

aus dem Schema:

(9)

(aa)	(ab)	(ac)	p_1	q_1	(al)	F_1
(ab)	(bb)	(bc)	p_2	q_2	(bl)	F_2
(ac)	(bc)	(cc)	p_3	q_3	(cl)	F_3
p_1	p_2	p_3	.	.	$-p_0$	$F_4 = 0$
q_1	q_2	q_3	.	.	$-q_0$	$F_5 = 0$

das Schema:

(9*)

(aa)	(ab)	(ac)	p_1	q_1	(al)	F_1
	$(bb.1)$	$(bc.1)$	$(p_2.1)$	$(q_2.1)$	$(bl.1)$	$(F_2.1)$
		$(cc.2)$	$(p_3.2)$	$(q_3.2)$	$(cl.2)$	$(F_3.2)$
			$-\boxed{pp}$	$-\boxed{pq}$	$(-p_0.3)$	$(F_4.3)$
				$-\boxed{qq.1}$	$(-q_0.4)$	$(F_5.4)$

so ist auch

$$(10)\quad \mu_F^2 = \mu^2 \left(\frac{F_1^2}{(a\,a)} + \frac{(F_2.1)^2}{(b\,b.1)} + \frac{(F_3.2)^2}{(c\,c.2)} + \frac{(F_4.3)^2}{-\boxed{pp}} + \frac{(F_5.4)^2}{-\boxed{qq.1}} \right).$$

Zu (9*) ist entwickelt

$$(11)\quad \begin{aligned} \boxed{pp} &= \frac{p_1 p_1}{(a\,a)} + \frac{(p_2.1)(p_2.1)}{(b\,b.1)} + \frac{(p_3.2)(p_3.2)}{(c\,c.2)} \\ \boxed{pq} &= \frac{p_1 q_1}{(a\,a)} + \frac{(p_2.1)(q_2.1)}{(b\,b.1)} + \frac{(p_3.2)(q_3.2)}{(c\,c.2)} \end{aligned}$$

u. s. f.

und erkennt man daraus, dass $\boxed{pp}$ $\boxed{qq.1}$ positive Grössen sind.

Durch Hinzutreten der Bedingungsgleichungen (2) zu den Fehlergleichungen (1) vermindert sich auch, wie Formel (10) zeigt, das reciproke Gewicht einer beliebigen Function F der Unbekannten — wie es ja nicht anders sein kann, da die (2) eine vermehrte Controlle bedeuten.

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit wird gleich

$$(12)\quad \mu = \mp \sqrt{\frac{(\lambda\lambda)}{n - m + r}}$$

wenn n Beobachtungen (Fehlergleichungen), m Unbekannte $xyz..$ und r Bedingungsgleichungen gegeben, also $n - m + r$ überschüssige Beobachtungen vorhanden sind.

Der Berechnung von $(\lambda\lambda)$ aus den einzelberechneten λ steht zur Controlle gegenüber die Berechnung nach einer der beiden Formeln:

$$(13)\quad (\lambda\lambda) = (ll) - (al)x - (bl)y - (cl)z + p_0 k_1 + q_0 k_2$$

$$(14)\quad (\lambda\lambda) = (ll) - \frac{(al)^2}{(a\,a)} - \frac{(b\,l.1)^2}{(b\,b.1)} - \frac{(cl.2)^2}{(c\,c.2)} - \frac{(-p_0.3)^2}{-\boxed{pp}} - \frac{(-q_0.4)^2}{-\boxed{qq.1}}.$$

Die Gleichungen (2) bedingen hiernach eine Vergrösserung von $(\lambda\lambda)$; in der That muss $(\lambda\lambda)$ grösser werden, weil μ durch das Hinzutreten der (2) zu den (1) sich, theoretisch betrachtet, nicht ändern darf, und sich dadurch doch der Nenner der Formel um r vergrössert hat.

Beispiel 13*. (Vergl. §. 24. S. 195.)

Seien die Fehlergleichungen:

$$(1)\quad \begin{aligned} \lambda_1 &= -1 + x + y + z && \text{Gew. } 1 \\ \lambda_2 &= -1 + 2x - 3y && \text{„ } 1 \\ \lambda_3 &= -2 \quad . \quad . \quad z && \text{„ } 1 \end{aligned}$$

und die Bedingungsgleichungen:

$$(2)\qquad \begin{aligned} 0 &= +1 + x + y + z \\ 0 &= -3 \;\; . \;\; + y - z \end{aligned}$$

so werden die Normalgleichungen folgendes Tableau geben, welchem wir zur Berechnung der Gewichte von x, y, z und der Function $x + y + z$ die nöthigen vier Verticalcolumnen angehängt haben:

(8)

x	y	z	k_1	k_2		(x)	(y)	(z)	$(x+y+z)$
+5	−5	+1	+1	.	+3	+1	.	.	+1
−5	+10	+1	+1	+1	−2	.	+1	.	+1
+1	+1	+2	+1	−1	+3	.	.	+1	+1
+1	+1	+1			−1	.	.	.	.
.	+1	−1			+3	.	.	.	.

Hieraus folgt nach dem Gauss'schen Algorithmus:

(9)

x	y	z	k_1	k_2		(x)	(y)	(z)	$(x+y+z)$
+5	−5	+1	+1	.	+3	+1	.	.	+1
	+5	+2	+2	+1	+1	+1	+1	.	+2
		+1	.	−1.4	+2	−0.6	−0.4	+1	.
			−1	−0.4	−2	−0.6	−0.4	.	−1
.				−2	+6.4	−0.8	−0.6	+1.4	.

Gleichzeitig erhält man die reducirten Normalgleichungen:

$$(10)\qquad \begin{aligned} x - y + 0.2z + 0.2k_1 \;\; . \;\; &= +0.6 \\ y + 0.4z + 0.4k_1 + 0.2k_2 &= +0.2 \\ z \;\; . \;\; - 1.4k_2 &= +2.0 \\ k_1 + 0.4k_2 &= +2.0 \\ k_2 &= -3.2 \end{aligned}$$

woraus folgt

$$k_2 = -3.2 \quad k_1 = +3.28$$
$$z = -2.48 \quad y = +0.52 \quad x = +0.96. \tag{11}$$

Ferner wird

$$\lambda_1 = -2.00 \quad \lambda_2 = -0.64 \quad \lambda_3 = -4.48$$
$$[\lambda\lambda] = 24.48. \tag{12}$$

Nach Formel (14) dieses §. wird übereinstimmend:

$$[\lambda\lambda] = 6 - \frac{9}{5} - \frac{1}{5} - \frac{4}{1} - \frac{4}{-1} - \frac{40.96}{-2} = 24.48.$$

Damit ist nun

$$\mu = \mp\sqrt{\frac{24.48}{3-3+2}} = \mp 3.50. \tag{13}$$

Die reciproken Gewichte werden für

$$(14)\quad \begin{cases} x & \text{gleich } \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{0.36}{1} + \frac{0.36}{-1} + \frac{0.64}{-2} = 0.08 \\ & \text{Gew.} = 12.5 \\ y & \text{„ } \quad + \frac{1}{5} + \frac{0.16}{1} + \frac{0.16}{-1} + \frac{0.36}{-2} = 0.02 \\ & \text{Gew.} = 50 \\ z & \text{„ } \quad + \frac{1}{1} \quad + \frac{1.96}{-2} = 0.02 \\ & \text{Gew.} = 50 \\ x+y+z & \text{„ } \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \quad + \frac{1}{-1} \quad = 0.00 \\ & \text{Gew.} = \infty. \end{cases}$$

Das unendlich grosse Gewicht in der Bestimmung der Function $x + y + z$ ist eine nothwendige Folge des Umstandes, dass dieses Aggregat durch eine Bedingungsgleichung gegeben ist.

Löst man das Normalgleichungssystem (8) allgemein auf (§. 17. I), so erhält man das System der Q wie folgt

(15)

	1	2	3	4	5
1	0.08	−0.04	−0.04	+0.44	+0.40
2	− 0.04	+0.02	+0.02	+0.28	+0.30
3	− 0.04	+0.02	+0.02	+0.28	−0.70
4	+ 0.44	+0.28	+0.28	− 1.08	+0.20
5	+ 0.40	+0.30	−0.70	+0.20	−0.50

Hiernach sind die reciproken Gewichte der Unbekannten xyz resp. $Q_{1.1} = 0.08$ $Q_{2.2} = 0.02$ $Q_{3.3} = 0.02$ und das reciproke Gewicht der Function $\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z$ wird gleich

$$0.08\,\alpha_1^2 - 0.08\,\alpha_1\alpha_2 + 0.02\,\alpha_2^2 - 0.08\,\alpha_1\alpha_3 + 0.04\,\alpha_2\alpha_3 + 0.02\,\alpha_3^2$$

also für $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, wie es sein muss, gleich Null.

§. 25.

Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen, zwischen deren Unbekannten Bedingungsgleichungen bestehen, durch successive Ausgleichung in zwei Theilen.

I. Theil. Wir gleichen die vermittelnden Beobachtungen ohne Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen aus, setzen aber einstweilen voraus, dass die vermittelnden Beobachtungen allein auch eine vollständige Bestimmung ihrer Unbekannten enthalten. Das System der reducirten Normalgleichungen, welches nun dieser 1. Theil der Ausgleichung ergiebt und welches ein demselben vollständig äquivalentes Gleichungssystem repräsentirt, wird folgende Form erhalten:

(1)

$$\begin{aligned} x + \alpha_1' y + \beta_1' z + \gamma_1' t &= \chi_1 \quad \text{Gew. } (aa) \\ y + \beta_2' z + \gamma_2' t &= \chi_2 \quad \text{,, } (bb.1) \\ z + \gamma_3' t &= \chi_3 \quad \text{,, } (cc.2) \\ t &= \chi_4 \quad \text{,, } (dd.3) \end{aligned}$$

wenn wir uns an §. 17. anschliessen und wie daselbst nur vier Unbekannte voraussetzen.

II. Theil. Die Werthe $x\ y\ z\ t$ sind, da die Bedingungsgleichungen unberücksichtigt geblieben, noch nicht die vollständigen Werthe der Unbekannten. Bezeichnen wir diese mit $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$, $t+\tau$, so nehmen die Bedingungsgleichungen diese Form an:

$$
\begin{aligned}
0 &= p_0+p_1(x+\xi)+p_2(y+\eta)+p_3(z+\zeta)+p_4(t+\tau)\\
0 &= q_0+q_1(x+\xi)+q_2(y+\eta)+q_3(z+\zeta)+q_4(t+\tau)\\
0 &= r_0+r_1(x+\xi)+r_2(y+\eta)+r_3(z+\zeta)+r_4(t+\tau)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Wir bestimmen aber die geänderten Werthe der Unbekannten nicht direct, weil wir alsdann die Fehlergleichungen des 1. Theils zuziehen müssten, sondern wir drücken die Unbekannten durch die von einander unabhängigen (fingirten) Beobachtungswerthe χ aus (§. 21. III. C.). Den Verbesserungen $\xi\eta\zeta\tau$ entsprechen Verbesserungen $v_1\ v_2\ v_3\ v_4$ der χ nach den Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
(x+\xi)+\alpha_1'(y+\eta)+\beta_1'(z+\zeta)+\gamma_1'(t+\tau) &= \chi_1+v_1 \text{ Gew. } (aa)\\
(y+\eta)+\beta_2'(z+\zeta)+\gamma_2'(t+\tau) &= \chi_2+v_2 \text{ Gew. } (bb.1)\\
(z+\zeta)+\gamma_3'(t+\tau) &= \chi_3+v_3 \text{ Gew. } (cc.2)\\
(t+\tau) &= \chi_4+v_4 \text{ Gew. } (dd.3)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

wofür mit Rücksicht auf (1) gesetzt werden kann:

$$
\begin{aligned}
\xi+\alpha_1'\eta+\beta_1'\zeta+\gamma_1'\tau &= v_1 \quad \text{Gew. } (aa)\\
\eta+\beta_2'\zeta+\gamma_2'\tau &= v_2 \quad \text{,, } (bb.1)\\
\zeta+\gamma_3'\tau &= v_3 \quad \text{,, } (cc.2)\\
\tau &= v_4 \quad \text{,, } (dd.3)
\end{aligned}
\tag{3*}
$$

Sind die v gefunden, so lassen $\xi\ \eta\ \zeta\ \tau$ sich hieraus berechnen oder auch nach den Formeln (§. 17. III)

$$
\begin{aligned}
v_1-\alpha_1'v_2-\alpha_2'v_3-\alpha_3'v_4 &= \xi\\
v_2-\beta_2'v_3-\beta_3'v_4 &= \eta\\
v_3-\gamma_3'v_4 &= \zeta\\
v_4 &= \tau
\end{aligned}
\tag{3†}
$$

wenn $\alpha_2'\ \alpha_3'\ \beta_3'$ im 1. Theile der Ausgleichung berechnet wurden (was jedoch nur der Fall sein wird, wenn die Gewichte der Werthe der Unbekannten von Interesse sind).

Setzt man für die Widersprüche der Bedingungsgleichungen bei Einführung der Resultate $x\ y\ z\ t$ des 1. Theiles:

$$
\begin{aligned}
w_1 &= p_0 + p_1 x + p_2 y + p_3 z + p_4 t \\
w_2 &= q_0 + q_1 x + q_2 y + q_3 z + q_4 t \\
w_3 &= r_0 + r_1 x + r_2 y + r_3 z + r_4 t
\end{aligned} \tag{4}
$$

so erhalten die Bedingungsgleichungen (2) die Form:

$$
\begin{aligned}
0 &= w_1 + p_1 \xi + p_2 \eta + p_3 \zeta + p_4 \tau \\
0 &= w_2 + q_1 \xi + q_2 \eta + q_3 \zeta + q_4 \tau \\
0 &= w_3 + r_1 \xi + r_2 \eta + r_3 \zeta + r_4 \tau
\end{aligned} \tag{5}
$$

Eliminiren wir nun mit Hülfe des Systems (3*) hieraus der Reihe nach ξ, η, ζ und τ, so erhalten wir, in der üblichen Symbolik abgekürzt geschrieben:

$$
\begin{aligned}
p_1 v_1 + (p_2.1) v_2 + (p_3.2) v_3 + (p_4.3) v_4 + w_1 &= 0 \\
q_1 v_1 + (q_2.1) v_2 + (q_3.2) v_3 + (q_4.3) v_4 + w_2 &= 0 \\
r_1 v_1 + (r_2.1) v_2 + (r_3.2) v_3 + (r_4.3) v_4 + w_3 &= 0
\end{aligned} \tag{6}
$$

und zwar berechnet man die Coefficienten am bequemsten, wenn man nach dem Gauss'schen Algorithmus

von dem Schema

(7)

(aa)	(ab)	(ac)	(ad)	p_1	q_1	r_1
(ab)	(bb)	(bc)	(bd)	p_2	q_2	r_2
(ac)	(bc)	(cc)	(cd)	p_3	q_3	r_3
(ad)	(bd)	(cd)	(dd)	p_4	q_4	r_4

übergeht zu dem Schema:

(7*)

(aa)	(ab)	(ac)	(ad)	p_1	q_1	r_1
	$(bb.1)$	$(bc.1)$	$(bd.1)$	$(p_2.1)$	$(q_2.1)$	$(r_2.1)$
		$(cc.2)$	$(cd.2)$	$(p_3.2)$	$(q_3.2)$	$(r_3.2)$
			$(dd.3)$	$(p_4.3)$	$(q_4.3)$	$(r_4.3)$

wobei die Auflösung der Normalgleichungen des 1. Theils zu benutzen und zur Controlle Summenbildungen anzuwenden sind.

Die Correlatengleichungen der (6) werden

$$(8)\qquad \begin{aligned} v_1(aa) &= p_1 k_1 + q_1 k_2 + r_1 k_3 \\ v_2(bb.1) &= (p_2.1)k_1 + (q_2.1)k_2 + (r_2.1)k_3 \\ v_3(cc.2) &= (p_3.2)k_1 + (q_3.2)k_2 + (r_3.2)k_3 \\ v_4(dd.3) &= (p_4.3)k_1 + (q_4.3)k_2 + (r_4.3)k_3 \end{aligned}$$

und die Normalgleichungen:

$$(9)\qquad \begin{aligned} \boxed{pp}k_1 + \boxed{pq}k_2 + \boxed{pr}k_3 + w_1 &= 0 \\ \boxed{pq}k_1 + \boxed{qq}k_2 + \boxed{qr}k_3 + w_2 &= 0 \\ \boxed{pr}k_1 + \boxed{qr}k_2 + \boxed{rr}k_3 + w_3 &= 0 \end{aligned}$$

und ist hierin u. A.

$$(9^*)\qquad \begin{aligned} \boxed{pp} &= \frac{p_1 p_1}{(a\,a)} + \frac{(p_2.1)(p_2.1)}{(bb.1)} + \frac{(p_3.2)(p_3.2)}{(cc.2)} + \frac{(p_4.3)(p_4.3)}{(dd.3)} \\ \boxed{pq} &= \frac{p_1 q_1}{(a\,a)} + \frac{(p_2.1)(q_2.1)}{(bb.1)} + \frac{(p_3.2)(q_3.2)}{(cc.2)} + \frac{(p_4.3)(q_4.3)}{(dd.3)} \end{aligned}$$

u. s. f.

Nach dem Gauss'schen Algorithmus wird aus (9) gefunden das Tableau

(9†)

k_1	k_2	k_3	
$\boxed{pp}$	$\boxed{pq}$	$\boxed{pr}$	w_1
	$\boxed{qq.1}$	$\boxed{qr.1}$	$\boxed{w_2.1}$
		$\boxed{rr.2}$	$\boxed{w_3.2}$

Nachdem die k hieraus berechnet sind, geben die (8) die v und die (3*) oder (3†) die $\xi\,\eta\,\zeta\,\tau$. Man kann auch mit Uebergehung der v die $\xi\,\eta\,\zeta\,\tau$ direct aus den k berechnen, wenn man die allgemeinen Gl. (8) in die (3†) substituirt. Es wird alsdann

$$(10)\qquad \begin{aligned} \xi &= \sigma_1 Q_{1.1} + \sigma_2 Q_{1.2} + \sigma_3 Q_{1.3} + \sigma_4 Q_{1.4} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \tau &= \sigma_1 Q_{1.4} + \sigma_2 Q_{2.4} + \sigma_3 Q_{3.4} + \sigma_4 Q_{4.4} \end{aligned}$$

wo für beliebige Indices von $\sigma\,p\,q\,r$

$$(10^*)\qquad \sigma = pk_1 + qk_2 + rk_3$$

ist und die Q zu dem 1. Theile der Ausgleichung gehören.

$$
\begin{aligned}
w_1 &= p_0 + p_1 x + p_2 y + p_3 z + p_4 t \\
w_2 &= q_0 + q_1 x + q_2 y + q_3 z + q_4 t \\
w_3 &= r_0 + r_1 x + r_2 y + r_3 z + r_4 t
\end{aligned} \tag{4}
$$

so erhalten die Bedingungsgleichungen (2) die Form:

$$
\begin{aligned}
0 &= w_1 + p_1 \xi + p_2 \eta + p_3 \zeta + p_4 \tau \\
0 &= w_2 + q_1 \xi + q_2 \eta + q_3 \zeta + q_4 \tau \\
0 &= w_3 + r_1 \xi + r_2 \eta + r_3 \zeta + r_4 \tau
\end{aligned} \tag{5}
$$

Eliminiren wir nun mit Hülfe des Systems (3*) hieraus der Reihe nach ξ, η, ζ und τ, so erhalten wir, in der üblichen Symbolik abgekürzt geschrieben:

$$
\begin{aligned}
p_1 v_1 + (p_2.1) v_2 + (p_3.2) v_3 + (p_4.3) v_4 + w_1 &= 0 \\
q_1 v_1 + (q_2.1) v_2 + (q_3.2) v_3 + (q_4.3) v_4 + w_2 &= 0 \\
r_1 v_1 + (r_2.1) v_2 + (r_3.2) v_3 + (r_4.3) v_4 + w_3 &= 0
\end{aligned} \tag{6}
$$

und zwar berechnet man die Coefficienten am bequemsten, wenn man nach dem Gauss'schen Algorithmus

von dem Schema

(7)

(aa)	(ab)	(ac)	(ad)	p_1	q_1	r_1
(ab)	(bb)	(bc)	(bd)	p_2	q_2	r_2
(ac)	(bc)	(cc)	(cd)	p_3	q_3	r_3
(ad)	(bd)	(cd)	(dd)	p_4	q_4	r_4

übergeht zu dem Schema:

(7*)

(aa)	(ab)	(ac)	(ad)	p_1	q_1	r_1
	$(bb.1)$	$(bc.1)$	$(bd.1)$	$(p_2.1)$	$(q_2.1)$	$(r_2.1)$
		$(cc.2)$	$(cd.2)$	$(p_3.2)$	$(q_3.2)$	$(r_3.2)$
			$(dd.3)$	$(p_4.3)$	$(q_4.3)$	$(r_4.3)$

wobei die Auflösung der Normalgleichungen des 1. Theils zu benutzen und zur Controlle Summenbildungen anzuwenden sind.

Die Correlatengleichungen der (6) werden

$$(8)\qquad \begin{aligned} v_1(aa) &= p_1 k_1 + q_1 k_2 + r_1 k_3 \\ v_2(bb.1) &= (p_2.1)k_1 + (q_2.1)k_2 + (r_2.1)k_3 \\ v_3(cc.2) &= (p_3.2)k_1 + (q_3.2)k_2 + (r_3.2)k_3 \\ v_4(dd.3) &= (p_4.3)k_1 + (q_4.3)k_2 + (r_4.3)k_3 \end{aligned}$$

und die Normalgleichungen:

$$(9)\qquad \begin{aligned} \boxed{pp}k_1 + \boxed{pq}k_2 + \boxed{pr}k_3 + w_1 &= 0 \\ \boxed{pq}k_1 + \boxed{qq}k_2 + \boxed{qr}k_3 + w_2 &= 0 \\ \boxed{pr}k_1 + \boxed{qr}k_2 + \boxed{rr}k_3 + w_3 &= 0 \end{aligned}$$

und ist hierin u. A.

$$(9^*)\qquad \begin{aligned} \boxed{pp} &= \frac{p_1 p_1}{(aa)} + \frac{(p_2.1)(p_2.1)}{(bb.1)} + \frac{(p_3.2)(p_3.2)}{(cc.2)} + \frac{(p_4.3)(p_4.3)}{(dd.3)} \\ \boxed{pq} &= \frac{p_1 q_1}{(aa)} + \frac{(p_2.1)(q_2.1)}{(bb.1)} + \frac{(p_3.2)(q_3.2)}{(cc.2)} + \frac{(p_4.3)(q_4.3)}{(dd.3)} \end{aligned}$$

u. s. f.

Nach dem Gauss'schen Algorithmus wird aus (9) gefunden das Tableau

$$(9\dagger)\qquad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline k_1 & k_2 & k_3 & \\ \hline \boxed{pp} & \boxed{pq} & \boxed{pr} & w_1 \\ \hline & \boxed{qq.1} & \boxed{qr.1} & \boxed{w_2.1} \\ \hline & & \boxed{rr.2} & \boxed{w_3.2} \\ \hline \end{array}$$

Nachdem die k hieraus berechnet sind, geben die (8) die v und die (3*) oder (3†) die $\xi\ \eta\ \zeta\ \tau$. Man kann auch mit Uebergehung der v die $\xi\ \eta\ \zeta\ \tau$ direct aus den k berechnen, wenn man die allgemeinen Gl. (8) in die (3†) substituirt. Es wird alsdann

$$(10)\qquad \begin{aligned} \xi &= \sigma_1 Q_{1.1} + \sigma_2 Q_{1.2} + \sigma_3 Q_{1.3} + \sigma_4 Q_{1.4} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \tau &= \sigma_1 Q_{1.4} + \sigma_2 Q_{2.4} + \sigma_3 Q_{3.4} + \sigma_4 Q_{4.4} \end{aligned}$$

wo für beliebige Indices von $\sigma\ p\ q\ r$

$$(10^*)\qquad \sigma = pk_1 + qk_2 + rk_3$$

ist und die Q zu dem 1. Theile der Ausgleichung gehören.

Aber die Rechnung wird dadurch etwas vermehrt, wie eine Abzählung der Multiplicationen in (8) und (3*) gegenüber (10*) und (10) sofort ergiebt; ausserdem entspricht die Berechnung der Q des 1. Theils gar nicht unserm Rechnungsgange, denn wir führen die Auflösung des 1. Theils nur bis zu den Gl. (1); es ist sogar die Berechnung von $x\ y\ z\ t$ überflüssig, da man die w anstatt nach (4) nach den Gleichungen:

$$(4^*)\quad \begin{aligned} w_1 &= p_0 + p_1\chi_1 + (p_2.1)\chi_2 + (p_3 2)\chi_3 + (p_4.3)\chi_4 \\ w_2 &= q_0 + q_1\chi_1 + (q_2.1)\chi_2 + (q_3.2)\chi_3 + (q_4.3)\chi_4 \\ w_3 &= r_0 + r_1\chi_1 + (r_2.1)\chi_2 + (r_3.2)\chi_3 + (r_4.3)\chi_4 \end{aligned}$$

berechnen kann, die aus den (4) hervorgehen wie die (6) aus (5). Sind die v berechnet, so ergeben alsdann die vollständigen Werthe der Unbekannten sich aus den Gleichungen (3).

Im Ganzen hat man alsdann folgende Reihenfolge der Gleichungssysteme:

(1. 7. 7*. 4*. 6. 9. 9†. 8. 3);

werden aber im 1. Theile die Werthe der Unbekannten auch ermittelt, so kann man auch rechnen in der Reihenfolge:

(1. 7. 7*. 4. 6. 9. 9†. 8. 3* oder 3†).

III. Mittlerer Fehler einer Function der Unbekannten. Drücken wir die Unbekannten durch die fingirten Beobachtungswerthe $(\chi + v)$ aus, so gewährt dies den Vortheil, dass wir nur den 2. Theil der Ausgleichung noch zu beachten haben. Da aber der 2. Theil nur eine Ausgleichung bedingter Beobachtung enthält, ist sodann die weitere Rechnung nach §. 23. auszuführen. Seien nun

(11)
$F_1 F_2 F_3 F_4$ die partiellen Differentialquotienten der Function nach den vier Unbekannten $x\ y\ z\ t$ und

$f_1\ f_2\ f_3\ f_4$ die totalen Differentialquotienten der Function nach $\chi_1\ \chi_2\ \chi_3\ \chi_4$.

Während erstere sofort durch Differentiation erhalten werden, müssen die letztern erst berechnet werden. Dies ist bereits in §. 21. III B (vergl. Gl. (8) und (10)) für eine lineare Function F geschehen und wir entnehmen daraus leicht, dass man allgemein hat

(12) $f_1 = F_1 \quad f_2 = (F_2.1) \quad f_3 = (F_3.2) \quad f_4 = (F_4.3)$

und diese Werthe sind nun für die f in Formel (7) §. 23. einzuführen. Man hat mit Rücksicht auf die Normalgleichungen (9), welche an Stelle der Gl. (4) §. 23. treten:

$$(13)\quad \begin{cases} \mu_F = \mu\sqrt{\mathrm{I} - \mathrm{II}} \\ \mathrm{I} = [ff] = \frac{f_1 f_1}{(a\,a)} + \frac{f_2 f_2}{(b\,b.1)} + \frac{f_3 f_3}{(c\,c.2)} + \frac{f_4 f_4}{(d\,d.3)} \\ \qquad = \frac{F_1^2}{(a\,a)} + \frac{(F_2.1)^2}{(b\,b.1)} + \frac{(F_3.2)^2}{(c\,c.2)} + \frac{(F_4.3)^2}{(d\,d.3)} \\ \mathrm{II} = \frac{[pf]^2}{[pp]} + \frac{[qf.1]^2}{[qq.1]} + \frac{[rf.2]^2}{[rr.2]} \end{cases}$$

worin u. A.

$$(13^*)\quad [pf] = \frac{p_1 f_1}{(a\,a)} + \frac{(p_2.1) f_2}{(b\,b.1)} + \frac{(p_3.2) f_3}{(c\,c.2)} + \frac{(p_4.3) f_4}{(d\,d.3)}$$
$$= \frac{p_1 F_1}{(a\,a)} + \frac{(p_2.1)(F_2.1)}{(b\,b.1)} + \frac{(p_3.2)(F_3.2)}{(c\,c.2)} + \frac{(p_4.3)(F_4.3)}{(d\,d.3)}$$

und $[qf.1]$, $[rf.2]$ aus $[qf]$, $[rf]$ sich nach dem Gauss'schen Algorithmus mit Hülfe der Normalgl. (9) des 2. Theils der Ausgleichung berechnen.

Führt man in die Function F nicht die Werthe $x + \xi$ $y + \eta$, $z + \zeta$, $t + \tau$, sondern die aus der Ausgleichung der vermittelnden Beobachtungen allein resultirenden Werthe $x\ y\ z\ t$ ein, so ist für den mittlern Fehler der Function

$$\mu_F = \mu\sqrt{1}.$$

Ist die Function der Unbekannten eine der Unbekannten selbst, z. B. $x + \xi$, so ist $F_1 = 1 \quad F_2 = F_3 = F_4 = 0$ zu setzen, im Uebrigen aber die Rechnung wie im Allgemeinen.

IV. Verschiedene Formeln zur Berechnung des mittlern Beobachtungsfehlers μ. Wir wollen bezeichnen mit

(14) e die Beobachtungsfehler der Beobachtungswerthe l nach dem 1. Theile der Ausgleichung,
λ die Beobachtungsfehler der Beobachtungswerthe l nach der Gesammtausgleichung.

Dann ist allgemein für beliebige Indices von $e\lambda labcdg$

$$(15)\quad \left.\begin{aligned} e &= -l + ax + by + cz + dt \\ \lambda &= -l + a(x+\xi) + b(y+\eta) + c(z+\zeta) \\ &\quad + d(t+\tau) \end{aligned}\right\} \text{Gew.}\, g$$

Es wird daher

$$\lambda = e + a\xi + b\eta + c\zeta + d\tau$$

und

$$[\lambda\lambda g] = [eeg] + [(a\xi + b\eta + c\zeta + d\tau)^2 g].$$

Mit Rücksicht auf die Gl. (3*) aber hat man daraus leicht

$$(\lambda\lambda) = (ee) + \overline{|vv|} \tag{16}$$

wenn man setzt

$$\overline{|vv|} = v_1 v_1 (aa) + v_2 v_2 (bb.1) + v_3 v_3 (cc.2) + v_4 v_4 (dd.3). \tag{16*}$$

Man kann sowohl diese Summe wie (ee) auch summarisch mit Hülfe der resp. Normalgleichungen berechnen und hat nach §. 17. resp. §. 23.

$$(ee) = (ll) - \frac{(al)^2}{(aa)} - \frac{(bl.1)^2}{(bb.1)} - \frac{(cl.2)^2}{(cc.2)} - \frac{(dl.3)^2}{(dd.3)}$$

$$\overline{|vv|} = \frac{w_1^2}{\overline{|pp|}} + \frac{\overline{|w_2.1|}^2}{\overline{|qq.1|}} + \frac{\overline{|w_3.2|}^2}{\overline{|rr.2|}}. \tag{17}$$

Der mittlere Fehler μ einer Beobachtung vom Gewicht 1 kann auf dreierlei Art berechnet werden, nämlich nach einem der drei Ausdrücke:

$$\sqrt{\frac{(\lambda\lambda)}{n-m+r}},\ \sqrt{\frac{(ee)}{n-m}},\ \sqrt{\frac{\overline{|vv|}}{r}} \tag{18}$$

bei n Fehlergleichungen, m Unbekannten und r Bedingungsgleichungen.

Der erste Ausdruck berücksichtigt die ganze Ausgleichung, der zweite nur den 1. Theil, der dritte nur den 2. Theil derselben. Theoretisch genommen müssen die drei Ausdrücke dasselbe ergeben, was der Fall ist, wenn die Proportion

$$(\lambda\lambda) : (ee) : \overline{|vv|} = n - m + r : n - m : r$$

erfüllt ist, wofür man einfacher schreibt:

$$(ee) : \overline{|vv|} = n - m : r. \tag{19}$$

weil aus dieser Proportion wegen (16) die vorhergehende von selbst folgt.

Ueber die Bedeutung des Umstandes, dass die zweite

und dritte einmal Formel für den mittlern Fehler erheblich verschiedene Werthe geben, vergl. §. 31. II.

V. Vergleicht man die Formeln des §. 25. mit denen von §. 24. II, so ist unschwer zu erkennen, dass §. 25. etwas wesentlich Neues nicht enthält. Die Gl. (9) des §. 25. werden auch bei der Auflösung des Systems (5) in §. 24. erhalten, nachdem daselbst die Unbekannten $x\ y\ z$ eliminirt sind. Stillschweigend ist dies schon angedeutet, indem die Summen $\boxed{pp}$ $\boxed{pq}$ ..., welche in §. 24. (11) und in §. 25. (9*) in der That dasselbe bedeuten, daselbst auch mit gleichen Symbolen bezeichnet wurden. Man bemerkt zugleich, dass $(-p_0.3)$, $(-q_0.4)$ in §. 24. (9*) mit $-w_1$ resp. $-\boxed{w_2.1}$ in §. 25. (9†) identisch sind und es stimmt daher $(\lambda\lambda)$ nach §. 24. (14) mit $(\lambda\lambda)$ nach §. 25. (16) und (17) völlig überein.

Wollen wir Formel (13) §. 24. übertragen, so müssen wir für $x\ y\ z$ jetzt nach der Bezeichnungsweise des §. 25. $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ setzen, während die Symbole $k_1 k_2$.. in beiden Verfahren, die Vorzeichen ausgenommen, übereinstimmen.

Beispiel 13†. (Vergl. §. 24. S. 195 u. 199.)

Seien die Fehlergleichungen wieder

$$(1)\qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= -1 + x + y + z && \text{Gew. } 1\\ \lambda_2 &= -1 + 2x - 3y \ . && \text{„ } 1\\ \lambda_3 &= -2 \ . \ . + z && \text{„ } 1 \end{aligned}$$

und die Bedingungsgleichungen

$$(2)\qquad \begin{aligned} 0 &= +1 + x + y + z\\ 0 &= -3 \ . + y - z \end{aligned}$$

so bilden wir die Normalgleichungen für (1) nach Schema (7) d. §. und mit Rücksicht auf die Gewichtsberechnung für die Unbekannten:

(16)

x	y	z	.	p	q	(x)	(y)	(z)
$+5$	-5	$+1$	$+3$	$+1$	.	$+1$	.	.
-5	$+10$	$+1$	-2	$+1$	$+1$	.	$+1$	.
$+1$	$+1$	$+2$	$+3$	$+1$	-1	.	.	$+1$

woraus folgt

(17)

+5	−5	+1	+3	+1	.	+1	.	.
	+5	+2	+1	+2	+1	+1	+1	.
		+1	+2	0	−1.4	−0.6	−0.4	+1

Die reducirten Normalgleichungen sind:

$$\begin{aligned} x - y + 0.2z &= +0.6 \quad \text{Gew. } 5 \\ y + 0.4z &= +0.2 \quad \text{,, } 5 \\ z &= 2 \quad \text{,, } 1 \end{aligned} \tag{18}$$

und damit nach (4*) dieses §. die Widersprüche

$$\begin{aligned} w_1 &= +1 + 1 \times 0.6 + 2 \times 0.2 + 0 \times 2 = +2.0 \\ w_2 &= -3 \quad . \quad +1 \times 0.2 - 1.4 \times 2 = -5.6 \end{aligned} \tag{19}$$

Die umgeformten Bedingungsgleichungen werden nach Tableau (17)

$$\begin{aligned} v_1 + 2v_2 \quad . \quad + 2.0 &= 0 \\ . + v_2 - 1.4v_3 - 5.6 &= 0 \end{aligned} \tag{20}$$

und die Normalgleichungen mit Rücksicht auf die Gewichtsberechnung:

(21)

k_1	k_2		(x)	(y)	(z)
+1.0	+0.4	+2.0	0.60	0.40	.
+0.4	+2.16	−5.6	1.04	0.76	−1.40

wofür sämmtliche Coefficienten sich aus (17) berechnen. Die Auflösung von (21) ergiebt das Tableau

(22)

k_1	k_2		(x)	(y)	(z)
+1.0	+0.4	+2.0	0.60	0.40	.
	+2.0	−6.4	0.80	0.60	−1.40

und wird damit

$$k_2 = +3.2 \quad k_1 = -3.28. \tag{23}$$

Die Correlatengleichungen sind

$$
\begin{aligned}
5v_1 &= k_1 && \text{giebt } v_1 = -0.656\\
5v_2 &= 2k_1 + k_2 && \text{„ } v_2 = -0.672\\
v_3 &= \ . \ -1.4k_2 && \text{„ } v_3 = -4.480
\end{aligned} \tag{24}
$$

Weiter ist mit Rücksicht auf (18):

$$
\begin{aligned}
(x+\xi) - (y+\eta) + 0.2(z+\zeta) &= -0.056\\
(y+\eta) + 0.4(z+\zeta) &= -0.472\\
(z+\zeta) &= -2.480
\end{aligned} \tag{25}
$$

Daher ist

$$z+\zeta = -2.480 \quad y+\eta = +0.520 \quad x+\xi = +0.960. \tag{26}$$

Für die reciproken Gewichte hat man nach dem ersten Theile der Ausgleichung, Tabl. (17):

$$
\begin{array}{rl}
\text{für } x & \mathrm{I} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{0.36}{1} = 0.76\\
\text{„ } y & \mathrm{I} = \ . \quad \frac{1}{5} + \frac{0.16}{1} = 0.36\\
\text{„ } z & \mathrm{I} = \ . \quad . \quad \frac{1}{1} = 1.00
\end{array} \tag{27}
$$

und nach dem zweiten Theile derselben, Tabl. (22):

$$
\begin{array}{rl}
\text{für } x+\xi & \mathrm{II} = \frac{0.36}{1.0} + \frac{0.64}{2.0} = 0.68\\
\text{„ } y+\eta & \mathrm{II} = \frac{0.16}{1.0} + \frac{0.36}{2.0} = 0.34\\
\text{„ } z+\zeta & \mathrm{II} = \ . \ + \frac{1.96}{2.0} = 0.98.
\end{array} \tag{27*}
$$

Mithin ist

$$\mu^2_{x+\xi} = 0.08\mu^2 \quad \mu^2_{y+\eta} = 0.02\mu^2 \quad \mu^2_{z+\zeta} = 0.02\mu^2. \tag{28}$$

Die Verbesserungen λ werden:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 = -2.00 \quad \lambda_2 = -0.64 \quad \lambda_3 = -4.48\\
(\lambda\lambda) = 24.48.
\end{aligned} \tag{29}
$$

Die Summe $\boxed{vv}$ ist nach (24) gleich 24.48 und nach (22) übereinstimmend:

$$\boxed{vv} = \frac{(2.0)^2}{1} + \frac{(6.4)^2}{2} = 24.48.$$

$\boxed{vv}$ und $(\lambda\lambda)$ haben gleiche Werthe, da die e Null sind. In der That hat man aus (18) und (1)

$$x = -0.4 \quad y = -0.6 \quad z = 2$$
$$e_1 = e_2 = e_3 = 0$$

auch übereinstimmend mit der Berechnung aus (ll) mittelst (17)

$$(ee) = 6 - \frac{9}{5} - \frac{1}{5} - \frac{4}{1} = 0.$$

VI. Besondere Fälle der Aufgabe. *A.* Die Ausgleichung wird nicht wesentlich anders, wenn die Bedingungsgleichungen einen Theil der in den Fehlergleichungen enthaltenen Unbekannten nicht enthalten und hat man einfach pqr für diese Unbekannten Null zu setzen. Zu möglichster Einfachheit der Rechnung setze man diese Unbekannten im 1. Theile den andern voran (vergl. §. 21. IV).

B. Enthalten die Bedingungsgleichungen mehr Unbekannte als die Fehlergleichungen, so bilde man wie bisher das dem 1. Theile der Ausgleichung äquivalente System der χ und führe dieses in die Bedingungsgleichungen ein. Zu den Gleichungssystemen (4) oder (4*) resp. (6) werden jetzt gegen früher noch Glieder hinzutreten, die den im 1. Theile nicht vorkommenden Unbekannten entsprechen. Die Aufgabe erhält von da ab die in §. 26. abzuhandelnde Form V.

C. Ist nach den Bemerkungen unter V. dieses §. die Zerlegung der Ausgleichungsaufgabe von der Form IV. in zwei Theile im Allgemeinen nicht praktisch, weil damit eine Zersplitterung verbunden ist, so wird gerade diese in dem Falle sehr vieler, in Gruppen mit verschiedenen Unbekanntensystemen zusammenfassbaren Messungen von Vortheil werden, weil sie eine grössere Uebersichtlichkeit der Rechnung ermöglicht. Jede dieser Gruppen wird zunächst für sich ausgeglichen, sodass das Resultat des 1. Theiles der Ausgleichung nun durch eine Anzahl von Systemen reducirter Normalgleichungen (äquivalenter Beobachtungen) dargestellt wird, welche in die Bedingungsgleichungen einzuführen sind.

D. Reichen die vermittelnden Beobachtungen allein zur Bestimmung der Unbekannten nicht aus, so wird sich das bei der Auflösung der Normalgleichungen

im 1. Theile der Ausgleichung zeigen, indem man auf Gleichungen stossen wird, deren Coefficienten Null sind. (§. 21. V.)

Knüpfen wir an das daselbst (S. 170) behandelte Beispiel an, so bilden wir zur Auflösung der Normalgleichungen und Coefficientenberechnung der Bedingungsgleichungen das Schema:

(20)

(aa)	(ab)	(ac)	(ad)	(al)	p_1	q_1	r_1
(ab)	(bb)	(bc)	(bd)	(bl)	p_2	q_2	r_2
(ac)	(bc)	(cc)	(cd)	(cl)	p_3	q_3	r_3
(ad)	(bd)	(cd)	(dd)	(dl)	p_4	q_4	r_4

und daraus

(21)

(aa)	(ab)	(ac)	(ad)	(al)	p_1	q_1	r_1
	$(bb.1)$	.	$(bd.1)$	$(bl.1)$	$(p_2.1)$	$(q_2.1)$	$(r_2.1)$
		.	.	.	$(p_3.1)$	$(q_3.1)$	$(r_3.1)$
			$(dd.3)$	$(dl.3)$	$(p_4.3)$	$(q_4.3)$	$(r_4.3)$

womit die Bedingungsgleichungen werden:

$$
\begin{aligned}
&p_1 v_1 + (p_2.1)v_2 + (p_3.1)\xi + (p_4.3)v_4 + w_1 = 0\\
&q_1 v_1 + (q_2.1)v_2 + (q_3.1)\xi + (q_4.3)v_4 + w_2 = 0\\
&r_1 v_1 + (r_2.2)v_2 + (r_3.1)\xi + (r_4.3)v_4 + w_3 = 0
\end{aligned}
\qquad (22)
$$

wenn gesetzt wird:

$$
\begin{aligned}
w_1 &= p_0 + p_1\chi_1 + (p_2.1)\chi_2 + (p_3.1)z + (p_4.3)\chi_4\\
w_2 &= q_0 + q_1\chi_1 + (q_2.1)\chi_2 + (q_3.1)z + (q_4.3)\chi_1\\
w_3 &= r_0 + r_1\chi_1 + (r_2.1)\chi_2 + (r_3.1)z + (r_4.3)\chi_4
\end{aligned}
\qquad (23)
$$

worin z einen beliebigen Näherungswerth bedeutet.

Die Bedingungsgleichungen haben aber wieder die Form der Ausgleichungsaufgabe V. §. 26.

Beispiel 14. Seien die Fehlergleichungen

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= -1 + 2x - 3y \quad . \quad \text{Gew. } 1\\
\lambda_2 &= -2 \quad . \quad . \quad + z \quad \text{„ } 1
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

die Bedingungsgleichungen

$$(2) \qquad \begin{aligned} 0 &= +1 + x + y + z \\ 0 &= -3 \quad\quad + y - z \end{aligned}$$

so sehen wir sofort, dass die Fehlergleichungen (1) zur Bestimmung aller Unbekannten nicht ausreichen. Wir bilden trotzdem die Normalgleichungen und fügen rechter Hand gleich die nöthigen Verticalcolonnen bei, namentlich auch zur Gewichtsberechnung für alle Unbekannte:

(3)

x	y	z		p	q	(x)	(y)	(z)
+4	−6	.	+2	+1	.	+1	.	.
−6	+9	.	−3	+1	+1	.	+1	.
.	.	+1	+2	+1	−1	.	.	+1

Hieraus folgt

(4)

4	−6	.	+2	+1	.	+1	.	.
	.	.	.	+2.5	+1	+1.5	+1	.
		+1	+2	+1	−1	.	.	+1

Gleichzeitig hat man die reducirten Normalgleichungen

$$(5) \qquad \begin{aligned} x - 1.5y \quad &= +0.5 \\ z &= +2.0. \end{aligned}$$

Die Fehler e der Gl. (1) werden hiermit gleich Null; was auch die Rechnung nach Formel (17) dieses §. anzeigt:

$$[ee] = 5 - \tfrac{4}{4} \cdot -\tfrac{4}{1} = 0.$$

Wenn wir als Näherungswerth von y Null annehmen, so haben wir für die Widersprüche der Bedingungsgleichungen:

$$(6) \qquad w_1 = +3.5 \qquad w_2 = -5.0.$$

Die Bedingungsgleichungen gehen über in

$$(7) \qquad \begin{aligned} v_1 + 2.5\eta + v_3 + 3.5 &= 0 \\ \eta - v_3 - 5.0 &= 0 \end{aligned}$$

und sind hieraus die v und η ermittelt, so geben die Gleichungen

$$(8) \qquad \begin{aligned} (x+\xi) - 1.5(y=\eta) \quad . \quad &= +0.5 + v_1 \\ (z+\zeta) &= +2.0 + v_3 \end{aligned}$$

oder auch die Gl.

$$(8^*) \qquad \begin{aligned} \xi - 1.5\eta \quad . &= v_1 \quad \text{Gew. } 4 \\ \zeta &= v_3 \quad \text{„ } 1 \end{aligned}$$

die vollständige Bestimmung der Unbekannten. (Fortsetzung folgt §. 26. als Beisp. 15.)

§. 26.

Ausgleichung von Aufgaben der Form V. (§. 5.):

$$(1) \qquad \begin{aligned} 0 &= w_1 + p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + p_3\lambda_3 + p_4\lambda_4 + a_1x + b_1y \\ 0 &= w_2 + q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 + q_3\lambda_3 + q_4\lambda_4 + a_2x + b_2y \\ 0 &= w_3 + r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2 + r_3\lambda_3 + r_4\lambda_4 + a_3x + b_3y \end{aligned}$$

worin

$$(1^*) \qquad \begin{aligned} w_1 &= p_0 + p_1l_1 + p_2l_2 + p_3l_3 + p_4l_4 \\ w_2 &= q_0 + q_1l_1 + q_2l_2 + q_3l_3 + q_4l_4 \\ w_3 &= r_0 + r_1l_1 + r_2l_2 + r_3l_3 + r_4l_4 \end{aligned}$$

(Führt man für x und y Näherungswerthe (x) (y) ein, so treten selbstredend zu den w noch die Glieder $a(x)$, $b(y)$, während in (1) nun die Verbesserungen ξ η anstatt x y zu substituiren sind.)

I. Durch Elimination der Unbekannten x y reduciren wir die Aufgabe auf die Ausgleichung bedingter Beobachtungen und zwar erhalten wir bei $r = 3$ Gleichungen, $n = 4$ Beobachtungen (denen die λ entsprechen) und $m = 2$ Unbekannten alsdann $r - m = 1$ Bedingungsgleichungen zwischen den λ allein. Sind dieselben bestimmt, so folgt für den mittlern Fehler der Gewichtseinheit nach §. 23. (6)

$$(2) \qquad \mu = \sqrt{\frac{[\lambda l g]}{r-m}}.$$

Wir können die Aufgabe auch auf vermittelnde Beobachtungen reduciren, indem wir z. B. im Falle des Systems (1) λ_1 λ_2 λ_3 durch λ_4 x y ausdrücken und um besser

anzudeuten, dass λ_4 nun zu den Unbekannten hinzutritt, es mit z bezeichnen. Man erhält damit die Fehlergleichungen in der Form:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -l_1' + a_1'x + b_1'y + c_1'z \\
\lambda_2 &= -l_2' + a_2'x + b_2'y + c_2'z \\
\lambda_3 &= -l_3' + a_3'x + b_3'y + c_3'z \\
\lambda_4 &= \quad . \quad\quad . \quad\quad . + \quad z
\end{aligned}$$

Allgemein sind es n Fehlergleichungen mit $m + (n - r)$ Unbekannten.

Welches Verfahren man wählt, wird im speciellen Falle von der Bequemlichkeit der Rechnung abhängen (§. 22. IV.). Oftmals kann auch eine directe Lösung vortheilhaft sein.

II. Directe Lösung. Indem $[\lambda\lambda g]$ mit Berücksichtigung von (1) zu einem Minimum werden soll, bilden wir den Ausdruck

$$\begin{aligned}
[\lambda\lambda g] &- 2k_1(w_1 + p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + p_3\lambda_3 + p_4\lambda_4 + a_1x + b_1y) \\
&- 2k_2(w_2 + q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 + q_3\lambda_3 + q_4\lambda_4 + a_2x + b_2y) \\
&- 2k_3(w_3 + r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2 + r_3\lambda_3 + r_4\lambda_4 + a_3x + b_3y)
\end{aligned}$$

und setzen seine partiellen Differentialquotienten nach $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_4\ x\ y$ gleich Null. Das giebt die Correlatengleichungen:

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned}
\lambda_1 g_1 &= p_1k_1 + q_1k_2 + r_1k_3 \\
\lambda_2 g_2 &= p_2k_1 + q_2k_2 + r_2k_3 \\
\lambda_3 g_3 &= p_3k_1 + q_3k_2 + r_3k_3 \\
\lambda_4 g_4 &= p_4k_1 + q_4k_2 + r_4k_3 \\
0 &= a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 \\
0 &= b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3
\end{aligned}$$

womit die Gl. (1) in der bei Ausgleichung bedingter Beobachtungen üblichen Abkürzungsweise ergeben:

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned}
(pp)k_1 + (pq)k_2 + (pr)k_3 + a_1x + b_1y + w_1 &= 0 \\
(pq)k_1 + (qq)k_2 + (qr)k_3 + a_2x + b_2y + w_2 &= 0 \\
(pr)k_1 + (qr)k_2 + (rr)k_3 + a_3x + b_3y + w_3 &= 0 \\
a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + \ . \quad . \quad . &= 0 \\
b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3 + \ . \quad . \quad . &= 0
\end{aligned}$$

Die weitere Auflösung dieses Normalgleichungssystems

erfolgt nach §. 17. Ist man bei Anwendung des Gauss'schen Algorithmus soweit gelangt, dass die k eliminirt sind, so erhält man ein System, das wir symbolisch so bezeichnen wollen

$$(5)\qquad \begin{aligned} -\underline{|aa|}\,x - \underline{|ab|}\,y + \underline{|aw|} &= 0\cdot \\ -\underline{|ab|}\,x - \underline{|bb|}\,y + \underline{|bw|} &= 0 \end{aligned}$$

und welches negativ genommen, als ein Normalgleichungssystem für die Unbekannten $x\ y$ zu betrachten ist. Verfolgt man den Rechnungsgang, so erkennt man, dass u. A.

$$(6)\qquad \begin{aligned} \underline{|ab|} &= \frac{a_1 b_1}{(pp)} + \frac{(a_2.1)(b_2.1)}{(qq.1)} + \frac{(a_3.2)(b_3.2)}{(rr.3)} \\ \underline{|aw|} &= -\frac{a_1 w_1}{(pp)} - \frac{(a_2.1)(w_2.1)}{(qq.1)} - \frac{(a_3.2)(w_3.2)}{(rr.2)} \end{aligned}$$

und $\underline{|aa|}$ sowie $\underline{|bb|}$ positive Grössen sind.

Für $[\lambda\lambda g]$ entwickelt man leicht die Formeln zu summarischer Berechnung in früherer Weise und erhält:

$$(7)\qquad \begin{aligned} [\lambda\lambda g] &= -[wk] \\ [\lambda\lambda g] &= \frac{w_1^2}{(pp)} + \frac{(w_2.1)^2}{(qq.1)} + \frac{(w_3.2)^2}{(rr.2)} + \frac{\underline{|aw|}^2}{-\underline{|aa|}} + \frac{\underline{|bw.1|}^2}{-\underline{|bb.1|}}\cdot \end{aligned}$$

Die Anwesenheit der Glieder ax, by in (1) ist hiernach Veranlassung zu einer Verminderung von $[\lambda\lambda g]$, was auch sein muss, soll andrerseits μ seinen Werth durch Hinzutreten jener Glieder in (1) nicht ändern, da doch gleichzeitig dadurch eine Verminderung des Nenners der Formel für μ stattfindet (vergl. §. 23. (6) und §. 26. (2)).

III. Um das Quadrat des mittlern Fehlers einer Function F von $xy..$ und den ausgeglichenen Beobachtungswerthen $(l + \lambda)$ abzuleiten, verfahren wir im Princip wie in früheren Fällen derselben Art, wesshalb hier nur die Hauptmomente der Entwicklung Platz finden sollen:

Seien $F_1 F_2$ die partiellen Differentialquotienten der Function $(m = 2)$ nach $x\ y$

$f_1 f_2 f_3 f_4$ die partiellen Differentialquotienten der Function $(n = 4)$ nach $l_1\ l_2\ l_3\ l_4$

so hat man daraus die totalen Differentialquotienten von F nach den l abzuleiten. Es ist aber für ein beliebiges l (also für gleiche Indices von f und l)

$$\frac{dF}{dl} = f + \left(f_1 \frac{d\lambda_1}{dl} + f_2 \frac{d\lambda_2}{dl} + f_3 \frac{d\lambda_3}{dl} + f_4 \frac{d\lambda_4}{dl}\right) + \left(F_1 \frac{\partial x}{\partial l} + F_2 \frac{\partial y}{\partial l}\right).$$

Mit Hülfe der Correlatengleichungen (3) ergiebt sich daraus durch Werthseinsetzung der $\frac{d\lambda}{dl}$:

$$(8)\quad \frac{dF}{dl} = f + (pf)\frac{\partial k_1}{\partial l} + (qf)\frac{\partial k_2}{\partial l} + (rf)\frac{\partial k_3}{\partial l} + F_1 \frac{\partial x}{\partial l} + F_2 \frac{\partial y}{\partial l}$$

worin bedeuten

$$(pf) = \left[\frac{pf}{g}\right] \quad (qf) = \left[\frac{qf}{g}\right] \quad (rf) = \left[\frac{rf}{g}\right].$$

Mit Einführung von Hülfsgrössen Q, die sich in üblicher Weise aus dem System (4) bestimmen (§. 11.), finden wir aber für $k_1\, k_2\, k_3\, x\, y$ folgende Formeln, durch welche sie durch die w und damit durch die l ausgedrückt werden:

$$(9)\quad \begin{aligned} k_1 + w_1 Q_{1.1} + w_2 Q_{1.2} + w_3 Q_{1.3} &= 0 \\ k_2 + w_1 Q_{1.2} + w_2 Q_{2.2} + w_3 Q_{2.3} &= 0 \\ k_3 + w_1 Q_{1.3} + w_2 Q_{2.3} + w_3 Q_{3.3} &= 0 \\ x + w_1 Q_{1.4} + w_2 Q_{2.4} + w_3 Q_{3.4} &= 0 \\ y + w_1 Q_{1.5} + w_2 Q_{2.5} + w_3 Q_{3.5} &= 0 \end{aligned}$$

In diese Ausdrücke führen wir für w deren Werthe nach den Gleichungen (1*) ein und finden dann allgemein für gleiche Indices von $l\, p\, q\, r$:

$$(10)\quad \begin{aligned} \frac{\partial k_1}{\partial l} &= -(p Q_{1.1} + q Q_{1.2} + r Q_{1.3}) \\ \frac{\partial k_2}{\partial l} &= -(p Q_{1.2} + q Q_{2.2} + r Q_{2.3}) \\ \frac{\partial k_3}{\partial l} &= -(p Q_{1.3} + q Q_{2.3} + r Q_{3.3}) \\ \frac{\partial x}{\partial l} &= -(p Q_{1.4} + q Q_{2.4} + r Q_{3.4}) \\ \frac{\partial y}{\partial l} &= -(p Q_{1.5} + q Q_{2.5} + r Q_{3.5}) \end{aligned}$$

Hiermit geht $\frac{dF}{dl}$ über in

$$(11)\quad \frac{dF}{dl} = f - \mathfrak{A}p - \mathfrak{B}q - \mathfrak{C}r$$

worin

$$\mathfrak{A} = (pf)\,Q_{1.1} + (qf)\,Q_{1.2} + (rf)\,Q_{1.3} + F_1\,Q_{1.4} + F_2\,Q_{1.5}$$
$$\mathfrak{B} = (pf)\,Q_{1.2} + (qf)\,Q_{2.2} + (rf)\,Q_{2.3} + F_1\,Q_{2.4} + F_2\,Q_{2.5}$$
$$\mathfrak{C} = (pf)\,Q_{1.3} + (qf)\,Q_{2.3} + (rf)\,Q_{3.3} + F_1\,Q_{3.4} + F_2\,Q_{3.5}$$

Bilden wir jetzt die Summe der Quadrate der $\frac{dF}{dl}$ dividirt durch die zugehörenden Gewichte g, so erhalten wir das reciproke Gewicht von F:

$$(12) \qquad Q_F = \left[\frac{ff}{g}\right] - \mathfrak{A}M - \mathfrak{B}N - \mathfrak{C}R$$

worin

$$M = 2\,(pf) - (pp)\mathfrak{A} - (pq)\mathfrak{B} - (pr)\mathfrak{C}$$
$$N = 2\,(qf) - (pq)\mathfrak{A} - (qq)\mathfrak{B} - (qr)\mathfrak{C}$$
$$R = 2\,(rf) - (pr)\mathfrak{A} - (qr)\mathfrak{B} - (r\,r)\mathfrak{C}$$

oder nach Substitution von $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}$:

$$M = (pf) + a_1\mathfrak{D} + b_1\mathfrak{E}$$
$$N = (qf) + a_2\mathfrak{D} + b_2\mathfrak{E}$$
$$R = (rf) + a_3\mathfrak{D} + b_3\mathfrak{E}$$

wofür

$$\mathfrak{D} = (pf)\,Q_{1.4} + (qf)\,Q_{2.4} + (rf)\,Q_{3.4} + F_1\,Q_{4.4} + F_2\,Q_{4.5}$$
$$\mathfrak{E} = (pf)\,Q_{1.5} + (qf)\,Q_{2.5} + (rf)\,Q_{3.5} + F_1\,Q_{4.5} + F_2\,Q_{5.5}.$$

Damit erhält man endlich für das Quadrat des mittlern Fehlers in F nach einiger Reduction

$$(13) \qquad \mu_F{}^2 = \mu^2 Q_F = \mu^2(\mathrm{I} - \mathrm{II})$$

$$Q_F = (ff) - \mathfrak{A}(pf) - \mathfrak{B}(qf) - \mathfrak{C}(rf) - \mathfrak{D}F_1 - \mathfrak{E}F_2$$

oder

$$(14)\begin{cases} \mathrm{I} = (ff) \\ \mathrm{II} = (pf)^2 Q_{1.1} \\ \quad + 2(pf)(qf)\,Q_{1.2} + (qf)^2 Q_{2.2} \\ \quad + 2(pf)(rf)\,Q_{1.3} + 2(qf)(rf)\,Q_{2.3} + (rf)^2 Q_{3.3} \\ \quad + 2(pf)F_1\,Q_{1.4} + 2(qf)F_1\,Q_{2.4} + 2(rf)F_1\,Q_{3.4} + F_1{}^2 Q_{4.4} \\ \quad + 2(pf)F_2\,Q_{1.5} + 2(qf)F_2\,Q_{2.5} + 2(rf)F_2\,Q_{3.5} + 2F_1F_2\,Q_{4.5} + F_2{}^2 Q \end{cases}$$

Werden die Q eliminirt, so erhält man

$$(14^*) \qquad \mathrm{II} = \frac{(pf)^2}{(pp)} + \frac{(qf.1)^2}{(qq.1)} + \frac{(rf.2)^2}{(rr.2)} + \frac{(F_1.3)^2}{-\underline{|aa|}} + \frac{(F_2.4)^2}{-\underline{|bb.1|}}.$$

Wir überlassen es dem Leser, nachzuweisen, dass die jetzt gegebenen Formeln mit denen für den speciellen Fall vermittelnder oder bedingter Beobachtungen übereinstimmen.

Beispiel 15. Seien die Bedingungsgleichungen, wenn wir die λ mit v bezeichnen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} v_1 + 2.5\eta + v_3 + 3.5 &= 0 \\ \eta - v_3 - 5.0 &= 0. \end{aligned}$$

Gew. für v_1 gleich 4; Gew. für v_3 gleich 1.

Die Unbekannte η müsste nun, um auf die Form des Systems (1) dieses §. zu kommen, v_3 nachgestellt werden, aber man erkennt leicht, dass der Rechnungsgang sich unmittelbar auch auf die jetzige Anordnung anwenden lässt. Die Correlatengleichungen werden

$$(2)\qquad \begin{aligned} 4v_1 &= k_1 \\ 0 &= 2.5k_1 + k_2 \\ v_3 &= k_1 - k_2 \end{aligned}$$

und die Normalgleichungen

$$(3)\qquad \begin{aligned} 1.25k_1 + 2.5\eta - k_2 + 3.5 &= 0 \\ 2.5\ k_1 + \ . \ + k_2 \ . \ &= 0 \\ -\ k_1 + \ \eta + k_2 - 5.0 &= 0 \end{aligned}$$

Bei der Auflösung derselben berücksichtigen wir zugleich die Gewichtsberechnung der drei nachfolgenden Functionen von $v_1\ \eta\ v_3$

$$(4)\qquad \begin{aligned} 1.&\ v_1 + 1.5\eta \ . \\ 2.&\ . \quad \eta \ . \\ 3.&\ . \quad . \ v_3 \end{aligned}$$

wofür

1. $(pf) = 0.25$	$F = 1.5$	$(qf) = 0$
2. . . .	. 1.0	. . .
3. . . 1.0	. .	. −1.0

und fügen rechter Hand die dem entsprechenden Verticalcolonnen bei:

(5)

k_1	η	k_2		1.	2.	3.
+1.25	+2.5	−1	+3.5	+0.25	.	+1.0
+2.50	.	+1	.	+1.5	+1.0	.
−1.00	+1.0	+1	−5.0	.	.	−1.0

Daraus folgt

(6)

1.25	+2.5	−1	+3.5	+0.25	.	+1.0
	−5.0	+3	−7.0	+1.0	+1.0	−2.0
		+2	−6.4	−0.8	+0.6	−1.4

sowie gleichzeitig das System reducirter Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} k_1 + 2\eta - 0.8k_2 + 2.8 &= 0 \\ \eta - 0.6k_2 + 1.4 &= 0 \\ k_2 - 3.2 &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

womit

$$k_2 = +3.2 \qquad \eta = +0.52 \qquad k_1 = -1.28 \tag{8}$$

und nach den Correlatengleichungen ferner

$$v_1 = -0.32 \qquad v_3 = -4.48 \tag{9}$$

sich ergeben.

Zur Berechnung der reciproken Gewichte der erwähnten drei Functionen ist mit Hülfe der drei Verticalcolonnen rechter Hand in (6)

für die 1te	I = 0.25	II $= \frac{0.0625}{1.25} + \frac{1.00}{-5.0} + \frac{0.64}{2} = +0.17$
„ „ 2te	I = 0.00	II $= . + \frac{1.00}{-5.0} + \frac{0.36}{2} = -0.02$
„ „ 3te	I = 1.00	II $= \frac{1.00}{1.25} + \frac{4.00}{-5.0} + \frac{1.96}{2} = +0.98$

und damit

(10)

für die 1te	$\mu_1^2 = 0.08\mu^2$	also das Gewicht	$= 12.5$
„ „ 2te	$\mu_2^2 = 0.02\mu^2$	„ „ „	$= 50$
„ „ 3te	$\mu_3^2 = 0.02\mu^2$	„ „ „	$= 50$

Endlich ist nach (7) d. §.

$$(11) \qquad (vv) = \frac{(3.5)^2}{1.25} + \frac{(7.0)^2}{-5.0} + \frac{(6.4)^2}{+2} = 20.48$$

was mit der directen Rechnung aus den einzelnen v übereinstimmt. Und es wird, da $r = 2$, $m = 1$ ist

$$(12) \qquad \mu = \mp\sqrt{20.48} = \mp 4.53.$$

Das ebenbehandelte Beispiel ist zugleich die Fortsetzung zu **Beispiel 14.** Man findet mittelst der Werthe v_1 v_3 und $\eta = y$ aus (8*) daselbst:

$$(13) \qquad \xi = +0.46 \qquad \eta = +0.52 \qquad \zeta = -4.48$$

$$(14) \quad x + \xi = +0.96 \quad y + \eta = +0.52 \quad z + \zeta = -2.48.$$

Die mittlern Fehlerquadrate dieser Werthe sind aber in (10) der Reihe nach enthalten, wie ein Blick auf die Functionen (4) Beisp. 15 und die Gl. (8*) Beisp. 14 zeigt.

Mit den Werthen (14) werden die λ Beisp. 14:

$$(15) \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= -0.64 \quad \lambda_2 = -4.48 \\ [\lambda\lambda] &= 20.48 \end{aligned}$$

also mit (vv) übereinstimmend, wie es wegen $[ee] = 0$ sein muss. μ behält den Werth (12), da $n = 2$, $m = 3$, $r = 2$ also $n - m + r = 1$ ist.

§. 27.

Partiell äquivalente Beobachtungsreihen in Bezug auf einen Theil der Unbekannten oder Functionen derselben resp. der ausgeglichenen Beobachtungswerthe.

Wenn eine fingirte Beobachtung einer Grösse denselben Werth und dasselbe Gewicht ergiebt wie die Ausgleichung, so kann man sagen, es ist jene Beobachtung den gegebenen Beobachtungen in Bezug auf diese Unbekannte partiell äquivalent. Diese Ausdrucksweise kann man übertragen auf den Fall, wo es sich um eine Function von beliebig vielen der Unbekannten resp. der ausgeglichenen Beobachtungswerthe handelt.

I. Wir betrachten den Fall vermittelnder Beobachtungen. Geben v fingirte Beobachtungen nicht nur von ebensovielen verschiedenen Functionen der Unbekannten

gleiche Werthe und Gewichte, sondern auch von beliebigen Functionen dieser Functionen dieselben Werthe und Gewichte als die Ausgleichung, so sind jene Beobachtungen als den gegebenen bezüglich der ν Functionen partiell äquivalente zu bezeichnen.

Bildet man die lineare Function der Functionen $F' F'' \ldots F^{(\nu)}$

$$(1) \qquad \varrho_1 F' + \varrho_2 F'' + \ldots + \varrho_\nu F^{(\nu)}$$

worin die ϱ unbestimmte Coefficienten sind, so genügt es die Aequivalenzbedingungen für (1) aufzustellen, um sie bezüglich der ν Functionen zu erhalten.

$\nu = n$ giebt vollständige Aequivalenz; bei $\nu > n$ sind daher $\nu - n$ der Functionen bei Aufstellung der Aequivalenz einfach wegzulassen.

II. Praktisch interessant ist besonders der Fall partieller Aequivalenz für 2 Functionen $F' F''$. Wir setzen

$$(2) \qquad F = \varrho_1 F' + \varrho_2 F''$$

und haben bei 3 Unbekannten nach §. 19. (13)

$$(3) \qquad \mu_F{}^2 = \mu^2 \left\{ \frac{F_1^2}{(aa)} + \frac{(F_2.1)^2}{(bb.1)} + \frac{(F_3.2)^2}{(cc.2)} \right\}$$

Ein Blick auf die Gl. (14) daselbst zeigt aber, dass man hat

$$\begin{aligned} F_1 &= \varrho_1 F_1' + \varrho_2 F_1'' \\ (F_2.1) &= \varrho_1 (F_2'.1) + \varrho_2 (F_2''.1) \\ (F_3.2) &= \varrho_1 (F_3'.2) + \varrho_2 (F_3''.2) \end{aligned}$$

womit sich ergiebt

$$(4) \quad \begin{aligned} \mu_F{}^2 = {} & \mu^2 \left\{ \frac{F_1'^2}{(aa)} + \frac{(F_2'.1)^2}{(bb.1)} + \frac{(F_3'.2)^2}{(cc.2)} \right\} \varrho_1{}^2 \\ & + \mu^2 \left\{ \frac{F_1''^2}{(aa)} + \frac{(F_2''.1)^2}{(bb.1)} + \frac{(F_3''.2)^2}{(cc.2)} \right\} \varrho_2{}^2 \\ & + 2\mu^2 \left\{ \frac{F_1' F_1''}{(aa)} + \frac{(F_2'.1)(F_2''.1)}{(bb.1)} + \frac{(F_3'.2)(F_3''.2)}{(cc.2)} \right\} \varrho_1 \varrho_2 \end{aligned}$$

oder abgekürzt:

$$(5) \qquad \mu_F{}^2 = \mu^2 \left\{ Q_{1.1} \varrho_1{}^2 + Q_{2.2} \varrho_2{}^2 + 2 Q_{1.2} \varrho_1 \varrho_2 \right\}$$

$Q_{1.1}$ und $Q_{2.2}$ sind also die reciproken Gewichte für F' und F'' und aus diesen findet sich nach einem leicht zu abstrahirenden Verfahren $Q_{1.2}$.

Sind nun l_1, l_2 die äquivalenten Beobachtungen mit den Gleichungen

$$(6)\qquad \begin{aligned} 0 &= -l_1 + a_1 F' + b_1 F''' \quad \text{Gew. } 1 \\ 0 &= -l_2 + a_2 F' + b_2 F''' \quad \text{,, } 1 \end{aligned}$$

so wird man F durch l_1 und l_2 auszudrücken haben. Gelangt F in die Form

$$(7)\qquad F = \varkappa_1 l_1 + \varkappa_2 l_2$$

so giebt die Substitution von (6) in (7)

$$(8)\qquad \varrho_1 = \varkappa_1 a_1 + \varkappa_2 a_2 \qquad \varrho_2 = \varkappa_1 b_1 + \varkappa_2 b_2$$

$$(9)\qquad \varkappa_1 = \frac{\varrho_1 b_2 - \varrho_2 a_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \qquad \varkappa_2 = \frac{\varrho_2 a_1 - \varrho_1 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Es ist nun

$$(10)\qquad \mu_F{}^2 = \mu^2(\varkappa_1{}^2 + \varkappa_2{}^2) = \mu^2 \frac{[bb]\varrho_1{}^2 + [aa]\varrho_2{}^2 - 2[ab]\varrho_1\varrho_2}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}$$

und die Vergleichung mit (5) giebt die Aequivalenzbedingungen:

$$(11)\qquad [bb] = \Delta Q_{1.1} \quad [aa] = \Delta Q_{2.2} \quad [ab] = -\Delta Q_{1.2}$$

wenn gesetzt wird:

$$(12)\qquad \Delta = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2.$$

Δ muss unabhängig sein von den besondern Werthen a b eines äquivalenten Systems, da die linken Seiten der Gl. (11) für alle einander äquivalenten Systeme nach §. 21. II constante Werthe behalten müssen. In der That findet man aus (12) leicht

$$(13)\qquad \Delta = [aa][bb] - [ab]^2$$

womit (11) ergiebt

$$(14)\qquad \Delta = 1 : (Q_{1.1} Q_{2.2} - Q_{1.2}{}^2).$$

Die Elimination von a_2, b_2 aus (12) mittelst der (11) giebt ferner für a_1, b_1:

$$(15)\qquad a^2 Q_{1.1} + b^2 Q_{2.2} + 2ab Q_{1.2} = 1,$$

welche Gleichung auch für a_2 und b_2 gilt. Löst man nach b auf und führt die 2. Gl. (11) ein, so wird

$$(16)\qquad \begin{aligned} b_1 &= -a_1 \frac{Q_{1.2}}{Q_{2.2}} \pm \frac{a_2}{Q_{2.2}\sqrt{\Delta}} \\ b_2 &= -a_2 \frac{Q_{1.2}}{Q_{2.2}} \mp \frac{a_1}{Q_{2.2}\sqrt{\Delta}} \end{aligned}$$

worin sich die obern und die untern Zeichen entsprechen. Dividirt man mit a_1 resp. a_2 und eliminirt aus beiden $\frac{a_2}{a_1}$, so folgt:

$$(17)\quad \left(\frac{b_1}{a_1}+\frac{Q_{1.2}}{Q_{2.2}}\right)\left(\frac{b_2}{a_2}+\frac{Q_{1.2}}{Q_{2.2}}\right)=-\frac{1}{Q^2_{2.2}\Delta}\ \text{d. i.}=\left(\frac{Q_{1.2}}{Q_{2.2}}\right)^2-\frac{Q_{1.1}}{Q_{2.2}}.$$

Jedem Coefficientenverhältniss $\frac{b_1}{a_1}$ entspricht hiernach ein reeller Werth des andern, wobei, weil Δ positiv ist:

$$(18)\qquad \frac{b_1}{a_1}\gtrless -\frac{Q_{1.2}}{Q_{2.2}}\ \text{ergiebt}\ \frac{b_2}{a_2}\lessgtr -\frac{Q_{1.2}}{Q_{2.2}}.$$

Für $\frac{b_1}{a_1}=-\frac{Q_{1.2}}{Q_{2.2}}$ ist $\frac{b_2}{a_2}$ discontinuirlich $=\mp\infty$, mithin $a_2=0$, weil nach (11) b_2 nicht unendlich werden kann.

Aus (16) folgt noch

$$(19)\qquad \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2=-\left(\frac{b_2}{a_2}+\frac{Q_{1.2}}{Q_{2.2}}\right):\left(\frac{b_1}{a_1}+\frac{Q_{1.2}}{Q_{2.2}}\right)$$

womit die 2. Gl. (11) ergiebt

$$(20)\qquad a_1^2=\frac{\frac{b_2}{a_2}+\frac{Q_{1.2}}{Q_{2.2}}}{\frac{b_2}{a_2}-\frac{b_1}{a_1}}\Delta Q_{2.2}\qquad a_2^2=\frac{\frac{b_1}{a_1}+\frac{Q_{1.2}}{Q_{2.2}}}{\frac{b_1}{a_1}-\frac{b_2}{a_2}}\Delta Q_{2.2}.$$

a_1 und a_2 sind wegen (18) immer reell; welches Vorzeichen man ihnen giebt, ist gleichgültig, da mit a auch b und l das Zeichen wechseln.

Wird nun ein Coefficientenverhältniss $\frac{b_1}{a_1}$ angenommen, so geben die Formeln (17. 20. 6) der Reihe nach $\frac{b_2}{a_2}$, a_1, a_2, damit b_1, b_2 und l_1, l_2.

III. Besondere Form des äquivalenten Systems. Nehmen wir den Fall wieder vor, wo

$$\frac{b_1}{a_1}=-\frac{Q_{1.2}}{Q_{2.2}}\qquad a_2=0$$

wurde, so gehen die (6) über in

$$(21)\qquad \begin{aligned} 0&=-l_1+a_1F'+b_1F'' \quad \text{Gew. } 1\\ 0&=-l_2+\ .\ +b_2F''\quad \text{,, } 1\end{aligned}$$

wofür

Sind nun l_1, l_2 die äquivalenten Beobachtungen mit den Gleichungen

$$(6)\qquad \begin{aligned} 0 &= -l_1 + a_1 F' + b_1 F'' \quad \text{Gew. } 1 \\ 0 &= -l_2 + a_2 F' + b_2 F'' \quad \text{,, } 1 \end{aligned}$$

so wird man F durch l_1 und l_2 auszudrücken haben. Gelangt F in die Form

$$(7)\qquad F = \varkappa_1 l_1 + \varkappa_2 l_2$$

so giebt die Substitution von (6) in (7)

$$(8)\qquad \varrho_1 = \varkappa_1 a_1 + \varkappa_2 a_2 \qquad \varrho_2 = \varkappa_1 b_1 + \varkappa_2 b_2$$

$$(9)\qquad \varkappa_1 = \frac{\varrho_1 b_2 - \varrho_2 a_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \qquad \varkappa_2 = \frac{\varrho_2 a_1 - \varrho_1 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Es ist nun

$$(10)\qquad \mu_F{}^2 = \mu^2(\varkappa_1{}^2 + \varkappa_2{}^2) = \mu^2 \frac{[bb]\varrho_1{}^2 + [aa]\varrho_2{}^2 - 2[ab]\varrho_1\varrho_2}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}$$

und die Vergleichung mit (5) giebt die Aequivalenzbedingungen:

$$(11)\qquad [bb] = \Delta Q_{1.1} \qquad [aa] = \Delta Q_{2.2} \qquad [ab] = -\Delta Q_{1.2}$$

wenn gesetzt wird:

$$(12)\qquad \Delta = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2.$$

Δ muss unabhängig sein von den besondern Werthen a b eines äquivalenten Systems, da die linken Seiten der Gl. (11) für alle einander äquivalenten Systeme nach §. 21. II constante Werthe behalten müssen. In der That findet man aus (12) leicht

$$(13)\qquad \Delta = [aa][bb] - [ab]^2$$

womit (11) ergiebt

$$(14)\qquad \Delta = 1 : (Q_{1.1} Q_{2.2} - Q_{1.2}{}^2).$$

Die Elimination von a_2, b_2 aus (12) mittelst der (11) giebt ferner für a_1, b_1:

$$(15)\qquad a^2 Q_{1.1} + b^2 Q_{2.2} + 2ab\, Q_{1.2} = 1,$$

welche Gleichung auch für a_2 und b_2 gilt. Löst man nach b auf und führt die 2. Gl. (11) ein, so wird

$$(16)\qquad \begin{aligned} b_1 &= -a_1 \frac{Q_{1.2}}{Q_{2.2}} \pm \frac{a_2}{Q_{2.2}\sqrt{\Delta}} \\ b_2 &= -a_2 \frac{Q_{1.2}}{Q_{2.2}} \mp \frac{a_1}{Q_{2.2}\sqrt{\Delta}} \end{aligned}$$

worin sich die obern und die untern Zeichen entsprechen. Dividirt man mit a_1 resp. a_2 und eliminirt aus beiden $\frac{a_2}{a_1}$, so folgt:

$$(17)\quad \left(\frac{b_1}{a_1}+\frac{Q_{1.2}}{Q_{2.2}}\right)\left(\frac{b_2}{a_2}+\frac{Q_{1.2}}{Q_{2.2}}\right)=-\frac{1}{Q^2_{2.2}\,\Delta}\ \text{d. i.}=\left(\frac{Q_{1.2}}{Q_{2.2}}\right)^2-\frac{Q_{1.1}}{Q_{2.2}}.$$

Jedem Coefficientenverhältniss $\frac{b_1}{a_1}$ entspricht hiernach ein reeller Werth des andern, wobei, weil Δ positiv ist:

$$(18)\qquad \frac{b_1}{a_1}\gtrless -\frac{Q_{1.2}}{Q_{2.2}}\ \text{ergiebt}\ \frac{b_2}{a_2}\lessgtr -\frac{Q_{1.2}}{Q_{2.2}}.$$

Für $\frac{b_1}{a_1}=-\frac{Q_{1.2}}{Q_{2.2}}$ ist $\frac{b_2}{a_2}$ discontinuirlich $=\mp\infty$, mithin $a_2=0$, weil nach (11) b_2 nicht unendlich werden kann.

Aus (16) folgt noch

$$(19)\qquad \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2=-\left(\frac{b_2}{a_2}+\frac{Q_{1.2}}{Q_{2.2}}\right):\left(\frac{b_1}{a_1}+\frac{Q_{1.2}}{Q_{2.2}}\right)$$

womit die 2. Gl. (11) ergiebt

$$(20)\qquad a_1^2=\frac{\frac{b_2}{a_2}+\frac{Q_{1.2}}{Q_{2.2}}}{\frac{b_2}{a_2}-\frac{b_1}{a_1}}\Delta Q_{2.2}\qquad a_2^2=\frac{\frac{b_1}{a_1}+\frac{Q_{1.2}}{Q_{2.2}}}{\frac{b_1}{a_1}-\frac{b_2}{a_2}}\Delta Q_{2.2}.$$

a_1 und a_2 sind wegen (18) immer reell; welches Vorzeichen man ihnen giebt, ist gleichgültig, da mit a auch b und l das Zeichen wechseln.

Wird nun ein Coefficientenverhältniss $\frac{b_1}{a_1}$ angenommen, so geben die Formeln (17. 20. 6) der Reihe nach $\frac{b_2}{a_2}$, a_1, a_2, damit b_1, b_2 und l_1, l_2.

III. Besondere Form des äquivalenten Systems. Nehmen wir den Fall wieder vor, wo

$$\frac{b_1}{a_1}=-\frac{Q_{1.2}}{Q_{2.2}}\qquad a_2=0$$

wurde, so gehen die (6) über in

$$(21)\qquad \begin{aligned} 0&=-l_1+a_1F'+b_1F''\quad \text{Gew. } 1\\ 0&=-l_2+\ .\ +b_2F''\quad\ \ ,,\ \ 1\end{aligned}$$

wofür

$$a_1 = \sqrt{\Delta Q_{2.2}} \qquad a_1^2 + b_1^2 = \Delta \frac{Q^2_{2.2} + Q^2_{1.2}}{Q_{2.2}}$$

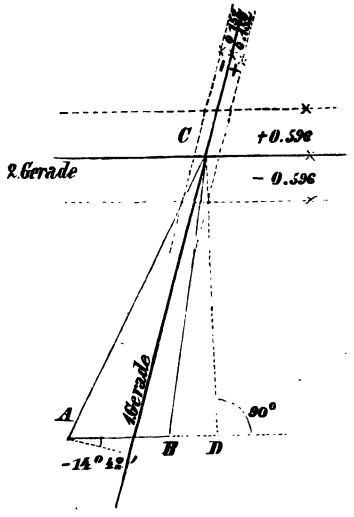
(22) $$b_1 = - a_1 \frac{Q_{1.2}}{Q_{2.2}}$$

$$b_2 = \sqrt{\frac{1}{Q_{2.2}}} \qquad a_2^2 + b_2^2 = \frac{1}{Q_{2.2}}$$

Diese Form der äquivalenten Beobachtungen empfiehlt sich durch ihre Einfachheit. Man wird sie auch bei mehr als 2 Functionen jeder andern vorziehen, z. B. bei 3 solchen $a_2 = a_3 = b_3 = 0$ setzen.

Beispiel 16. Gelegentlich seiner Gradmessung in den Ostseeprovinzen Russlands wurde von W. Struve ein Dreieck zwischen den Punkten (1) = Halljall, (2) = Hohenkreutz, (3) = Mäggi-Pälüs bearbeitet. Es fand sich

(1)
Winkel $A = 64^0\ 36'\ 4''.13$
„ $B = 99^0\ 3'\ 41''.74$
„ $C = 16^0\ 20'\ 16''.58$
Seite $AB = 11945.098$ Toisen.



Letztere wollen wir ihrer Grösse und Lage nach als streng richtig annehmen.

Es ist ferner nach Struve der sphär. Excess des Dreiecks

(2) $$E = 4''.353.$$

Ohne auf die Bequemlichkeit der Rechnung Rücksicht zu nehmen, gleichen wir nun die 3 Winkel nach vermittelnden Beobachtungen aus und setzen als Unbekannte die Winkel

(3) $$A = x = 64^0\,36'\ 4''.13 + \xi$$
$$B = y = 99^0\ 3'\,41''.74 + \eta.$$

Man hat alsdann für die Verbesserungen von A, B, C:

(4)
$\lambda_1 = \quad . \quad + \xi \quad .$ Gew. 1
$\lambda_2 = \quad . \quad . \quad + \eta$ „ 1
$\lambda_3 = + 1.903 - \xi - \eta$ „ 1

Entwickelt man die Normalgleichungen und damit die reducirten Normalgleichungen, so folgt

$$\begin{aligned} \xi + 0.5\eta &= +0.952 \quad [aa] = 2 \\ \eta &= +0.634 \quad [bb.1] = 1.5 \\ \xi &= +0.635 \end{aligned} \tag{5}$$

ferner

$$\lambda_1 = +0.635 \quad \lambda_2 = +0.634 = \lambda_3 \quad [\lambda\lambda] = 1.207 \tag{6}$$

Die corrigirten Winkel sind

$$\left.\begin{aligned} A &= 64^0\,36'\;\;4''.765 \\ B &= 99^0\;\;3'\;42''.374 \\ C &= 16^0\;20'\;17''.214 \end{aligned}\right\} \begin{array}{c}\text{Summe} \\ 180^0\;0'\;4''.353\end{array} \tag{7}$$

Ferner ist $\mu^2 = 1.207$, daher

$$\mu = \mp 1''.10 \left(1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \mp 0.32 \ldots \mp 1.88. \tag{8}$$

Um Punkt C gegen Linie AB festzustellen, beziehen wir C durch zwei rechtwinklige Coordinaten $u\ v$ auf A als Coordinatenanfang und AB als Axe der u:

$$\begin{aligned} u &= AC \cos\left\{A - \frac{2E'}{3}\right\} = 17986'.983 \\ v &= AC \sin\left\{A - \frac{E'}{3}\right\} = 37880.881 \end{aligned} \tag{9}$$

Sph. Excess E' für $ACD = 6.555$.

Wir betrachten nun beispielsweise u und v als zwei Functionen F' und F'', in Bezug auf welche partielle Aequivalenz hergestellt werden soll. Man hat alsdann mit Hülfe der Werthe (9), E und E' als constant angesehen, unter Beachtung der Relationen

$$AC = AB \frac{\sin\left(B - \frac{E}{3}\right)}{\sin\left(C - \frac{E}{3}\right)} \tag{10}$$

$$dA = dx \quad dB = dy \quad dC = -dx - dy \tag{11}$$

die Differentialquotienten:

$$\begin{aligned} F_1' &= \frac{\partial u}{\partial x} = 0.1138 \qquad F_2' = \frac{\partial u}{\partial y} = 0.2836 \\ F_1'' &= \frac{\partial v}{\partial x} = 0.7138 \qquad F_2'' = \frac{\partial v}{\partial y} = 0.5973. \end{aligned} \tag{12}$$

Mit Rücksicht auf (5) folgt weiter

$$(13)\qquad \begin{aligned}(F_2'.1) &= 0.2836 - 0.5 \times 0.1138 = 0.2267\\ (F_2''.1) &= 0.5973 - 0.5 \times 0.7138 = 0.2404\end{aligned}$$

und es wird

$$(14)\qquad \begin{aligned}Q_{1.1} &= \frac{(0.1138)^2}{2} + \frac{(0.2267)^2}{1.5} = 0.040737\\ Q_{2.2} &= \frac{(0.7138)^2}{2} + \frac{(0.2404)^2}{1.5} = 0.293283\\ Q_{1.2} &= \frac{0.1138 \times 0.7138}{2} + \frac{0.2267 \times 0.2404}{1.5} = 0.076948\end{aligned}$$

$$\Delta = 165.94 \cdot \sqrt{\Delta} = 12.882 \quad 1 : \sqrt{\Delta} = 0.077630.$$

Nehmen wir an, dass die äquivalenten Gleichungen die Form III. d. §. erhalten sollen, so ist zunächst

$$(15)\qquad \begin{aligned}&a_1 = 6.976 \quad b_1 = -1.830.3 \quad b_2 = 1.846.5\\ &a_1^2 = 48.67 \quad b_1^2 = 3.350 \quad b_2^2 = 3.410\\ &a_1^2 + b_1^2 = 52.02 \qquad a_2^2 + b_2^2 = 3.410\end{aligned}$$

und damit werden die äquivalenten Gleichungen:

$$(16)\qquad \begin{aligned}0 &= -56140 + 6.976u - 1.8303v \quad \text{Gew. } 1\\ 0 &= -69947 \quad . \quad + 1.8465v \quad \text{„ } 1\end{aligned}$$

wofür man auch setzen kann:

$$(17)\qquad \begin{array}{lll} & \text{Gew.} & \text{M. F.}\\ 0 = -7784 + 0.9672u - 0.2538v & 52.02 & \mp 0^t.152\\ 0 = -37881 \quad . \quad + \quad v & 3.41 & \mp 0.596\end{array}$$

Die t in (16) und (17) haben für uns keinen Werth, wir haben sie daher nicht scharf berechnet. Da nun u und v den Punkt C bestimmen, so ist das System (17) der Bestimmung von C äquivalent. Diese Gleichungen haben aber die Form von Gleichungen zweier Geraden, welche durch C hindurchgehen, denn allgemein ist die Gleichung einer solchen Geraden

$$0 = -p + u\cos\nu + v\sin\nu$$

worin p normaler Abstand der Geraden vom Anfang A und ν Winkel dieser Normalen mit AB, der Axe der u, ist, u und v aber ebensowohl die laufenden Coordinaten als die

besondern Coordinaten von C bedeuten. Beobachtungsgrösse ist p. Für die

(18) 1. Gerade ist $p_1 = 7784, .. \mp 0.152 \quad \nu_1 = -14^0 42'$
2. „ „ $p_2 = 37881, .. \mp 0.596 \quad \nu_2 = 90^0 0$

IV. Das Gegebene lässt sich leicht übertragen auf den Fall, wo die ν Functionen, bezüglich welcher ein partiell äquivalentes System aufgestellt werden soll, Functionen von Grössen sind, die durch irgend eine Form der Ausgleichungsaufgabe gefunden worden sind. Nehmen wir insbesondere wieder $\nu = 2$, so zeigt sich, dass die in II. d. §. gegebene Entwicklung sich nur insoweit ändert, als $Q_{1.1}$, $Q_{2.2}$ von der Form der Ausgleichungsaufgabe abhängen, aber die weitere Rechnung, insbesondere Bildung von $Q_{1.2}$ aus jenen beiden ist die frühere.

Wenn es sich ereignet, dass in F', F'' heterogene Beobachtungsgrössen vorkommen, so ist es am bequemsten, unter $Q_{1.1}$ $Q_{2.2}$ $Q_{1.2}$ in (5) die Coefficienten von resp. ϱ_1^2, ϱ_2^2 $2\varrho_1\varrho_2$ selbst zu verstehen, sodass $Q_{1.1}$ und $Q_{2.2}$ die mittlern Fehlerquadrate der Functionen F' und F'' sind. Für μ ist alsdann in den folgenden Formeln 1 einzuführen.

Beispiel 16. (Fortsetzung.) *A.* Der mittlere Fehler der Seite AB sei 0.1 Toise, sodass, da A und die Richtung AB als fest angenommen sind, B um $\mp 0'.1$ in Richtung AB unsicher erscheint. Man findet leicht

$$\text{Quadr. d. m. F. in } u = 0.040737 \times 1.21 + \left(\frac{u}{AB}\right)^2 0.01 = Q_{1.1}$$

(19) „ d. m. F. in $v = 0.293283 \times 1.21 + \left(\frac{v}{AB}\right)^2 0.01 = Q_{2.2}$

$$\text{und daher ist} \qquad 0.076948 \times 1.21 + \frac{uv}{AB.AB} 0.01 = Q_{1.2}$$

(19*) $Q_{1.1} = 0.071966 \quad Q_{2.2} = 0.455441 \quad Q_{1.2} = 0.140860$

womit (anstatt (17)) erhalten wird das äquivalente System:

(20) $0 = -5989 + 0.9553u - 0.2955v$ M. F. $\mp 0'.161$
$0 = -37881 \quad . \quad + \quad v$ M. F. $\mp 0.675.$

B. Werden die Winkelmessungen des Dreiecks nach bedingten Beobachtungen ausgeglichen, was das Ein-

fachste ist, so hat man als Bedingungsgleichung

$$0 = -1.903 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \tag{21}$$

und daher

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_1 = k \tag{21*}$$
$$3k - 1.903 = 0 \qquad k = 0.634$$

Man findet aber aus (9) und (10) entweder durch Differentiation oder Benutzung der logarithmischen Differenzen

$$\begin{aligned} du &= -0.1837\,dA - 0.0139\,dB - 0.2974\,dC + 1.5057\,dAB \\ dv &= +0.0872 \;\;. -0.0293 \;\;. -0.6265 \;\;. +3.1710 \;\;. \end{aligned} \tag{22}$$

Nach §. 23. hat man daher, indem die p der einzigen Bedingungsgleichung gleich 1 sind und die Coefficienten von dA, dB und dC die f für u resp. v bedeuten:

$$\left\{\begin{aligned} \mu_u{}^2 = Q_{1.1} &= ((-0.1837)^2 + (-0.0139)^2 + (-0.2974)^2)1.21 \\ &\quad + (+1.5057)^2 0.01 - \tfrac{(-0.4949)^2}{3} 1.21 \\ \mu_v{}^2 = Q_{2.2} &= ((+0.0872)^2 + (-0.0293)^2 + (-0.6265)^2)1.21 \\ &\quad + (+3.1710)^2 0.01 - \tfrac{(-0.5686)^2}{3} 1.21 \\ Q_{1.2} &= ((-0.1837)(+0.0872) + (-0.0139)(-0.0293) \\ &\quad + (-0.2974)(-0.6265))\,1.21 + \\ &\quad + (1.5057)(+3.1710)0.01 - \tfrac{(-0.4949)(-0.5686)}{3} 1.21 \end{aligned}\right. \tag{23}$$

womit sich dieselben Werthe wie in (19*) und (20) ergeben.

V. Kommen in verschiedenen Ausgleichungen theilweise dieselben Unbekannten vor, so kann man das Gesammtresultat für diese letzteren dadurch ableiten, dass man die partiellen äquivalenten Systeme dafür ableitet und diese nach der M. d. kl. Qu. behandelt.

Beispiel 17. Von einer gemeinsamen Linie AB aus gehen zwei Dreiecksnetze, die sonst nur noch in einem Punkte C zusammentreffen, derartig, dass ein Kranzsystem entsteht. Sind nun $u'v'$ und $u''v''$ die (rechtwinkligen oder polaren) Coordinaten für C nach beiden Ausgleichungen bezüglich desselben Coordinatensystems, so bilden wir die partiell äquivalenten Systeme:

(1)
$$0 = -l_1' + a_1'u' + b_1'v' \quad \text{m. F. } \mu'$$
$$0 = -l_2' \quad + b_2'v' \quad \text{,, } \mu'$$

und

(2)
$$0 = -l_1'' + a_1''u'' + b_1''v'' \quad \text{,, } \mu''$$
$$0 = -l_2'' \quad + b_2''v'' \quad \text{,, } \mu''$$

Zu bemerken ist, dass die Berechnung der a und b zwar nur auf etwa 4 bedeutliche Ziffern zu erfolgen braucht, dass aber mit den angenommenen Werthen von a und b die Berechnung der l im vorliegenden Falle sehr scharf erfolgen muss.

Für die endgültigen Werthe der Coordinaten $u\ v$ von C hat man nun die Fehlergleichungen

(3)
$$\lambda_1 = -l_1' + a_1'u + b_1'v \quad \text{m. F. } \mu'$$
$$\lambda_2 = -l_2' + \ . \ + b_2'v \quad \text{,, } \mu'$$
$$\lambda_3 = -l_1'' + a_1''u + b_1''v \quad \text{,, } \mu''$$
$$\lambda_4 = -l_2'' + \ . \ + b_2''v \quad \text{,, } \mu''$$

die in üblicher Weise aufzulösen sind.

Die Aenderungen von C geben auch Aenderungen der Coordinaten der andern Punkte, die man nachträglich bestimmen kann und zwar für jeden Punkt einzeln durch Herstellung eines in Bezug auf C und diesen Punkt partiell äquivalenten Systems von 4 Gleichungen, deren beide letzten aber mit (1) resp. (2) übereinstimmen müssen, während die beiden ersten durch Einführung von $u\ v$ zwei Gleichungen zur Ermittlung der verbesserten Coordinaten des betreffenden Punktes ergeben. (§. 21. III.)

In der Regel wird es in unserm Beispiele ähnlichen Fällen ausreichen, eine geringe Anzahl solcher Punkte streng zu verbessern, die andern aber nur genähert, etwa mit Hülfe einer einfachen (Lagrange'schen) Interpolationsformel.

§. 28.

Fehlerellipsen.

Seien allgemein

(1)
$$0 = -l_1 + a_1F' + b_1F' \quad \text{Gew. } 1$$
$$0 = -l_2 + a_2F' + b_2F'' \quad \text{,, } 1$$

zwei in Bezug auf die Functionen F' und F'' äquivalente Gleichungen mit den fingirten Beobachtungswerthen l_1 und l_2. Dieselben können wir in die Form

$$(2)\quad \begin{aligned} 0 &= -\frac{l_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} + \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}F' + \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}F'' \\ &\qquad \text{Gew. } (a_1^2+b_1^2) \\ 0 &= -\frac{l_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} + \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}F' + \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}F'' \\ &\qquad \text{Gew. } (a_2^2+b_2^2) \end{aligned}$$

bringen. Wir betrachten nunmehr F' und F'' als besondere Werthe rechtwinkliger Coordinaten u, v eines Punktes und es bezeichnen sodann die beiden Gleichungen die Gleichungen zweier bestimmenden Geraden desselben, in deren Durchschnitt er liegt.

Ist aber p die Länge des normalen Abstandes der Geraden vom Coordinatenanfang und der Winkel der Normalen mit der Axe der u gleich v, so ist die Gleichung der Geraden

$$(3)\quad 0 = -p + u\cos v + v\sin v.$$

Die Gleichungen (2) haben die Form dieser letztern Gleichung und es ist daher für irgend eine derselben

$$(4)\quad \begin{aligned} &\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ der als Beobachtungswerth mit dem Gewicht} \\ &(a^2+b^2) \text{ anzusehende Abstand vom Coordinatenanfange;} \\ &\frac{b}{a} = \tan v \text{ die Tangente des Neigungswinkels ihrer Normalen zur Axe der } u. \end{aligned}$$

Dem mittlern Fehler $\frac{\mu}{\sqrt{a^2+b^2}}$ entspricht eine mittlere Verlängerung resp. Verkürzung der Normalen oder eine parallele Verschiebung der Geraden.

Nach §. 27. (17) hat man nun leicht

$$(5)\quad \tan v_1 \tan v_2 + (\tan v_1 + \tan v_2)\frac{Q_{1.2}}{Q_{2.2}} + \frac{Q_{1.1}}{Q_{2.2}} = 0$$

und hiermit zeigt sich, dass man alle verschiedenen Paare äquivalenter Gleichungen (2) betrachten kann als Gleichungen conjugirter Durchmesser einer Ellipse, deren Mittelpunkt

der Punkt $(F' F'')$ ist und deren Axen zu der Axe der u geneigt sind unter Winkeln N_1 und N_2, für welche ist:

$$\cot 2N = \frac{Q_{1.1} - Q_{2.2}}{2Q_{1.2}} \tag{6}$$

und deren in die Richtungen N_1 und N_2 fallenden Längen sich verhalten wie

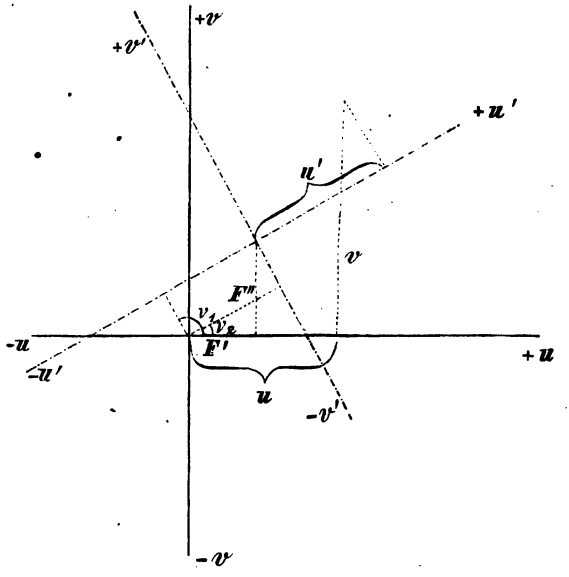
$$\sqrt{Q_{2.2} + Q_{1.2} \cot N_1} : \sqrt{Q_{2.2} + Q_{1.2} \cot N_2}. \tag{7}$$

Bezeichnen wir nämlich mit u v die Coordinaten eines Punktes eines Ellipsenumfanges mit dem Centrum $(F' F'')$, so kann man als Gleichung eines solchen betrachten

$$A(u - F')^2 + B(v - F'')^2 - 2C(u - F')(v - F'') = 1.$$

Durch den Punkt $(F' F'')$ legen wir zwei Gerade, deren Normalen mit der Axe der u die Winkel ν_1 und ν_2 einschliessen und nehmen dieselben als Axen der Parallelcoordinaten u' und v'. Dann ist

$$u - F' = + u' \sin \nu_1 - v' \sin \nu_2$$
$$v - F'' = - u' \cos \nu_1 + v' \cos \nu_2$$



womit die Ellipsengleichung übergeht in

$$u'^2(A\sin^2\nu_1 + B\cos^2\nu_1 + 2C\sin\nu_1\cos\nu_1) + v'^2(A\sin^2\nu_2 + B\cos^2\nu_2 + 2C\sin\nu_2\cos\nu_2) - 2u'v'(A\sin\nu_2\sin\nu_1 + B\cos\nu_1\cos\nu_2 + C\cos\nu_1\sin\nu_2 + C\sin\nu_1\cos\nu_2) = 1.$$

Die Axen der $u'v'$ werden conjugirte Durchmesser der Ellipse, wenn der Coefficient von $2u'v'$ Null wird, also für

$$\tan\nu_1\tan\nu_2 + (\tan\nu_1 + \tan\nu_2)\frac{C}{A} + \frac{B}{A} = 0.$$

Vergleicht man mit (5), so ergeben sich die Werthe von $\frac{C}{A}$ und $\frac{B}{A}$; es wird

$$A : B : C = Q_{2.2} : Q_{1.1} : Q_{1.2}.$$

Die Axen der $u'v'$ werden insbesondere die Axen der Ellipse für $\nu_1 = \nu_2 + 90^0$ oder $\tan\nu_1 = -\cot\nu_2$.

Bezeichnet man diese besonderen Werthe von ν mit $N_1\ N_2$, so giebt (5) leicht die für beide N gültige Relation (6). Die Quadrate der Längen der Hauptaxen werden proportional den beiden Werthen von

$$1 : (A\sin^2\nu + B\cos^2\nu + 2C\sin\nu\cos\nu)$$

oder

$$1 : (Q_{2.2}\sin^2 N + Q_{1.1}\cos^2 N + 2Q_{1.2}\sin N\cos N)$$

oder mittelst (6) proportional den beiden Werthen von:

$$1 : (Q_{2.2} + Q_{1.2}\cot N).$$

Hiernach verhalten sich die zu den durch $N_1\ N_2$ bezeichneten Richtungen senkrechten Axenlängen umgekehrt wie die Quadratwurzeln von $Q_{2.2} + Q_{1.2}\cot N_1$ und $Q_{2.2} + Q_{1.2}\cot N_2$; es sind daher die Axenlängen in Richtung N_1 und N_2 direct proportional wie $Q_{2.2} + Q_{1.2}\cot N_1$ und $Q_{2.2} + Q_{1.2}\cot N_2$, woraus (7) folgt.

Die Formeln (20) des §. 27. geben für $\frac{b_1}{a_1} = \tan N_1$ $\frac{b_2}{a_2} = \tan N_2$ unter Beachtung der Relation $\tan N_1 = -\cot N_2$ (gleiche Indices für a b und N):

$$a^2 = (Q_{2.2}\cos N - Q_{1.2}\sin N)\,\Delta\cos N$$

(8) $$b = a\tan N$$

$$a^2 + b^2 = (Q_{2.2} - Q_{1.2}\tan N)\,\Delta = 1 : (Q_{2.2} + Q_{1.2}\cot N)$$

Bestimmt man also den Punkt $(F'\ F'')$ durch zwei in die Ellipsenaxen fallende fingirte Gerade, so geben die (8)

die nöthigen Coefficienten der Gleichungen (2) derselben. Die Gerade, welche senkrecht zu der durch N bezeichneten Richtung liegt, hat zufolge ihres Gewichtes $a^2 + b^2$ und des mittlern Fehlers μ der Gewichtseinheit eine mittlere parallele Verschiebung

$$\mu\sqrt{Q_{2.2} + Q_{1.2}\cot N} \tag{9}$$

und durch diese mittlern Verschiebungen entstehen auf der andern Geraden, also in der durch N bezeichneten Richtung, Abschnitte, welche in demselben Verhältniss stehen, wie die Axen der oben besprochenen Ellipse, bei welcher überhaupt nur von relativen Dimensionen die Rede sein konnte.

Wir nehmen jetzt die absoluten Dimensionen der Halbaxen nach (9) an und nennen diese Ellipse, in Richtung und Länge ihrer Halbaxen bestimmt durch die Formeln

$$\cot 2N = \frac{Q_{1.1} - Q_{2.2}}{2\,Q_{1.2}} \qquad \mu\sqrt{Q_{2.2} + Q_{1.2}\cot N} \tag{10}$$

die Fehlerellipse.

Sie hat, wie wir bereits oben fanden, die Eigenschaft, in ihren conjugirten Durchmessern die Richtungen äquivalenter Geradenpaare anzugeben, und sie giebt ferner auch deren mittlere parallele Verschiebungen an.

Es genügt, den Nachweis hierzu für das besondere System §. 27. III. zu führen, weil Lage und Dimensionen der Ellipse unabhängig sind von einer Drehung des Coordinatensystems uv um seinen Anfangspunkt. Es ist aber nach §. 27. (22)

$$\tan \nu_1 = -\frac{Q_{1.2}}{Q_{2.2}} \qquad \nu_2 = 90^0 \tag{11}$$

$$a_1^2 + b_1^2 = \Delta\, Q_{2.2}\sec^2\nu_1 \quad a_2^2 + b_2^2 = 1 : Q_{2.2}$$

Die mittleren parallelen Verschiebungen der Geraden, welche senkrecht zu den resp. durch ν_1 und ν_2 bezeichneten Richtungen sind, ergeben sich hiermit zu

$$\mu : \sqrt{\Delta\, Q_{2.2}}\sec\nu_1 \qquad \mu\sqrt{Q_{2.2}}. \tag{12}$$

Der mittlern Verschiebung einer Geraden entsprechen Abschnitte auf der andern, deren Länge man aus jener durch Multiplication mit der csc des Conjugationswinkels $(\nu_1 — \nu_2)$ ableitet. Die Abschnitte sind mithin auf der Geraden, welche senkrecht zu der durch ν_1 bezeichneten Richtung

liegt,

(13) $\mu \sqrt{Q_{2.2}} \csc(\nu_1 - \nu_2)$ d. i. $\mu \sqrt{Q_{2.2}} \sec \nu_1$

und auf der Geraden, senkrecht zu der durch ν_2 gegebenen Richtung,

(13*) $\frac{\mu \csc(\nu_1 - \nu_2)}{\sqrt{\Delta Q_{2.2}} \sec \nu_1}$ d. i. $\frac{\mu}{\sqrt{\Delta Q_{2.2}}}$.

Diese Abschnitte sind aber nach bekannten Sätzen der analytischen Geometrie nicht verschieden von den halben Längen der conjugirten Durchmesser, die in dieselben Geraden fallen, denn es ist die Summe der Quadrate der Abschnitte (13) und (13*) gleich

$$\mu^2(Q_{2.2} + Q_{1.1})$$

d. i. ebensogross als die Summe der Quadrate der Halbaxen nach (10). Und es ist ferner das Product aus den Abschnitten in den Sinus des Conjugationswinkels gleich

$$\mu^2 : \sqrt{\Delta}$$

d. i. ebensogross als das Product der Halbaxen nach (10).

Hiernach kann man die Fehlerellipse immer mit Hülfe des besonderen Paares äquivalenter Geraden §. 27. III. (21) construiren, indem man nach den Formeln (11) und (12) die Richtungen und mittlern parallelen Verschiebungen berechnet und construirt und die Ellipse zeichnet, welche die 4 Seiten des von den letztern eingeschlossenen Parallelogrammes berührt.

In dem besondern Falle der Gültigkeit des Fehlergesetzes III. lässt sich zeigen, dass alle Punkte (uv), welche um die wahrscheinlichste Lage $(F'\ F'')$ herum auf dem Umfange einer zur Fehlerellipse ähnlichen, ähnlichliegenden und concentrischen Ellipse sich befinden, gleich wahrscheinliche Lagen des bestimmten Punktes sind. Unter diesen Ellipsen giebt es eine von solchen Dimensionen, dass die Wahrscheinlichkeiten für den Punkt, ausserhalb oder innerhalb zu liegen, gleich gross und also gleich 0.5 sind. Man erhält diese wahrscheinlichste Ellipse durch lineare Vergrösserung der Fehlerellipse im Verhältniss 1 : 1.17741.0. Dagegen ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Punkt innerhalb der Fehlerellipse liegt, die man zum Unterschied von der vorigen Ellipse die Mittlere-Fehlerellipse nennen kann, geringer und gleich 0.393470.0. (Siehe des Verfassers Studien über rationelle Vermessungen in der Zeitschr. f. Math. u. Phys. von Schlömilch 1868.)

Beispiel 10. (Fortsetzung zu §. 20. S. 158.) In diesem Falle, wo die in Bezug auf x und y partielle Aequivalenz

zugleich die totale ist (abgesehen von der Hülfsgrösse ξ), kann man aus den Normalgleichungen (10) daselbst sofort die Werthe von $[aa]$ $[ab]$ $[bb]$ entnehmen, nämlich

$$\begin{aligned} [aa] &= \quad 39208.9 = \Delta Q_{2.2} \\ [bb] &= \quad 85614.6 = \Delta Q_{1.1} \\ -[ab] &= +\,53289.4 = \Delta Q_{1.2} \end{aligned} \tag{17}$$

und damit wird nach §. 27. (13) resp. Gl. (10) dieses §.

$$\Delta = 517190000$$

$$\cot 2N = \frac{85614.6 - 39208.9}{106579} = +\,0.4355 \tag{18}$$

$$N_1 = 33^0\ 14' \qquad N_2 = 123^0\ 14'.$$

Die Quadrate der Halbaxen werden:

$$\begin{aligned} &0.0541\,(39208.9 + 53289.4 \times 1.5262) : 517190000 \\ &\qquad = 0.0541 : 4290 \\ &0.0541\,(39208.9 - 53289.4 \times 0.6552) : 517190000 \\ &\qquad = 0.0541 : 120539. \end{aligned} \tag{18*}$$

und es liegt daher

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{im Azimut } 33^0\ 14' \text{ die grosse Halbaxe von } 3^{mm}.55 \\ \text{„ \quad „ \quad } 123^0\ 14' \text{ die kleine \quad „ \quad „ } 0\ .67 \end{array} \right. \tag{18**}$$

Zur Construction der Ellipse kann man sich auch des äquivalenten Systems (vergl. S. 166)

$$\begin{aligned} \xi' - 1.35912\,\eta' &= 0 \quad \text{Gew. } 39208.9 \\ \eta' &= 0 \quad \text{„ } 13188.0 \end{aligned} \tag{19}$$

bedienen, worin ξ' und η' Aenderung der Ausgleichungsresultate $\xi\ \eta$ bedeuten. Aus (19) folgt

$$\begin{aligned} 0.59263\,\xi' - 0.80545\,\eta' &= 0 \quad \text{Gew. } 111636 \quad \text{M.F.} \mp 0^{mm}.70 \\ \eta' &= 0 \quad \text{„ } 13188 \quad \text{„ } \mp 2\ .02 \end{aligned} \tag{20}$$

in welcher Form das System zweien Geraden entspricht, deren Normalen resp. unter den Azimuten

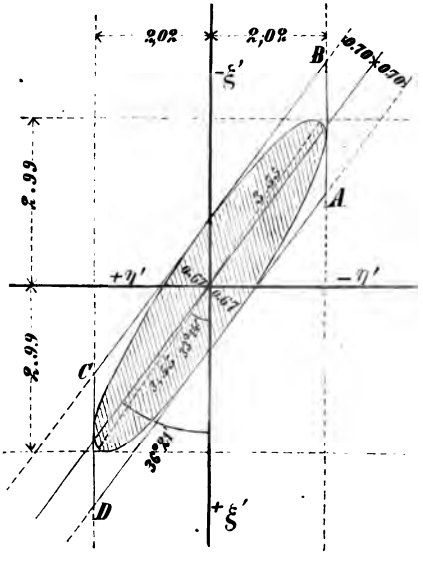
$$306^0\ 21' \text{ und } 90^0\ 0 \tag{21}$$

zur Axe der ξ' geneigt sind und deren mittlere parallele Verschiebungen resp. $\mp$ 0.70, $\mp$ 2.02 Millimeter betragen. Letztere bilden ein Parallelogramm $ABCD$, dessen Seiten die Fehlerellipse tangiren.

Zur Controlle dient noch die Beziehung zwischen (17) (18*) (20), dass

(22) $39208.9 + 85614.6 = 120539 + 4290 = 111636 + 13188$

welche darauf beruht, dass $[aa] + [bb]$ eine Constante für alle äquivalenten Systeme ist und dass für deren Form (2) §. 28. die Gewichtssumme mit jener Constanten übereinstimmt.



Beispiel 6. (Fortsetzung zu §. 6. S. 50.) Wir nehmen D als festen Punkt, DM als feste Richtung und setzen

(21) $$F' = \Delta DO \quad F'' = DO.\Delta D$$

worin ΔDO, ΔD kleine Aenderungen der angenommenen Werthe von DO und Winkel D bezeichnen, deren besondere Werthe Null den Punkt O selbst bestimmen mittelst $F' = 0 = F''$. Im Allgemeinen erscheinen F' und F'' als rechtwinklige Coordinaten einer geänderten Lage des Punktes O und es können somit die bezüglich $F'\,F''$ (oder bezüglich der Bestimmung des Punktes O) äquivalenten Gleichungssysteme als zu Systemen äquivalenter Geraden gehörend aufgefasst werden. Bei Berechnung der zugehörigen Fehlerellipse

ist zu beachten, dass F' und F'' heterogene Beobachtungsgrössen enthalten. Wir setzen daher nach (17) S. 54:

$$Q_{1.1}=(1.045\mu_3)^2+(+0.03055\mu_2)^2+(+0.03055\mu_1)^2=0.01113$$

(22)
$$Q_{2.2}=\left(\frac{DO}{206265}\mu_1\right)^2=(0.09596\,\mu_1)^2=0.001031$$

woraus nach dem Bildungsgesetze von $Q_{1.2}$ aus $Q_{1.1}$ $Q_{2.2}$ folgt:

(23) $$Q_{1.2}=0.03055\times 0.09596\,\mu_1{}^2=0.0003284.$$

Damit ergiebt sich

(24)
$$\cot 2N=\frac{0.01010}{0.000657}=15.14$$
$$N_1=1^0\,53'\qquad N_2=91^0\,53'$$

mit den resp. Halbaxen

$$\sqrt{0.001031+0.0003284\times 30.6}$$

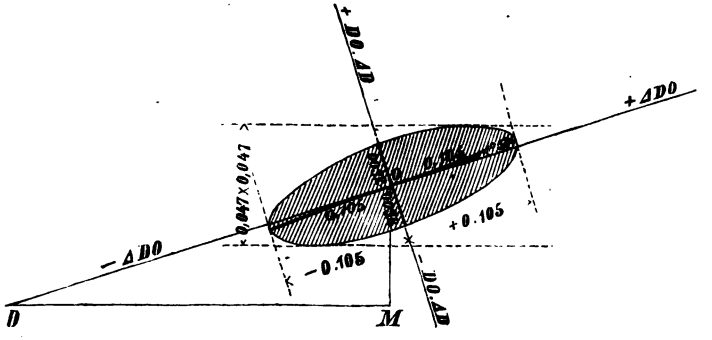
und
$$\sqrt{0.001031-0.0003284\times 0.0329}$$

oder $\sqrt{0.010752}$ und $\sqrt{0.001021}$

oder

(25) $$\mp 0^m.105 \quad \text{und} \quad \mp 0^m.032.$$

Zur Controlle können wir die erste der Gleichungen (20) d. Beisp. benutzen, welche den mittlern Fehler von DO giebt. Derselbe lässt sich aus der Fehlerellipse auf constructivem Wege ermitteln, indem man senkrecht zu DO an dieselbe Parallelen legt, die von O um den Betrag des m. F. abstehen müssen. Dagegen ist diese Prüfung durch OM nicht ausführbar, weil M selbst fehlerhaft gegen O und nicht wie D fest liegt, und nur weil zufällig OM senkrecht zur festen Richtung DM liegt, also M in Richtung OM fehlerfrei ist, gestattet OM ausnahmsweise auch die Prüfung.



Beispiel 18. (fingirt.) In einem vierpunktigen Dreiecksnetze, sehr nahe von der Form eines Quadrats, wurden folgende Richtungsbeobachtungen erhalten:

(1) Stat. 1.

Object:	2	3	4	Gew.
1. Satz	0° 0′ 0″	45° 0′ 0″.3	90° 0′ 0″.9	1
2. „	0 0 0	45 0 1 .0	. .	1
3. „	.	45 0 0 .0	89 59 59 .8	1

(2) Stat. 2.

Object:	1	3	4	Gew.
1. Satz	0° 0′ 0″	270° 0′ 0″.6	315° 0′ 0″.3	1
2. „	0 0 0	.	315 0 0 .6	1
3. „	.	270 0 0 .0	315 0 1 .0	1

(3) Stat. 3.

Object:	1	2	4	Gew.
1. Satz	0° 0′ 0″	45° 0′ 1″.0	315° 0′ 0″.5	1
2. „	0 0 0	45 0 0 .3	314 59 59 .7	1

(4) Stat. 4.

Object:	1	2	3	Gew.
1. Satz	0° 0′ 0″	45° 0′ 0″.2	90° 0′ 1″.3	0.5
2. „	0 0 0	45 0 1 .0	90 0 0 .5	0.5

Bei den Stationsausgleichungen folgen wir Beisp. 9. nur mit schematischer Anordnung in der daselbst auch schon angedeuteten Art und Weise.

Stationsausgl. 1. Aus (1) folgt unter Annahme der

(5)

Näherungswerthe:	Verbesserungen:
f. Obj. 2. 0° 0′ 0″	.
„ 3. 45 0 0	$+x_3$
„ 4. 90 0 0	$+x_4$

das Tableau der l:

(6)

Object:	1	2	3	:Reihennummer
	1	1	1	:Gewicht
2	0	0	.	
3	0.3	1.0	0	
4	0.9	.	− 0.2	
	1.2	1.0	− 0.2	:Summe
	3	2	2	:Gewichtsumme
	0.4	0.5	− 0.1	:Quotient

und daraus das Tableau der l':

(7)

Gew.Sa.:	Gewicht:	Object 2	Object 3	Object 4	Summen	
3	1	− 0.4	− 0.1	+ 0.5	+ 0.5	− 0.5
2	1	− 0.5	+ 0.5	.	+ 0.5	− 0.5
2	1	.	+ 0.1	− 0.1	+ 0.1	− 0.1
		(−0.9)	+ 0.5	+ 0.4	+ 1.1	− 1.1
			3	2	:Gewichtsumme	

Die Normalgleichungen werden hiermit (wobei wir in unserm einfachen Falle der Controlle durch Summengleichungen entbehren können):

(8)

x_3	x_4	
$^5/_3$	$-\,^5/_6$	+ 0.5
$-\,^5/_6$	$+\,^7/_6$	+ 0.4

und zwar bilden sich die Coefficienten mittelst (7) wie folgt (entspr. der Elimination der Hülfsgrössen u):

$$\begin{array}{rl} \frac{5}{3} = 3 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} & \text{Vert. col. 3} \\ \frac{7}{6} = 2 - \frac{1}{3} \quad . - \frac{1}{2} & \text{,,} \quad 4 \\ -\frac{5}{6} = \quad . - \frac{1}{3} \quad . - \frac{1}{2} & \text{,,} \quad 3 \text{ u. } 4 \end{array}$$

Aus (8) folgt, §. 17. II. Verfahren:

(9)

x_3	x_4	
$^5/_3$	$-\,^5/_6$	+0.5
	$^3/_4$	+0.65

und die reducirten Normalgleichungen werden:

(9*)

1	− 0.5	+0.3000
	1	+0.8667

womit die Stationsausgleichung beendet ist, wenn man sich auf das Nothwendige beschränkt. Wir berechnen aber noch aus (9*)

(9†) $\qquad x_3 = +\,0.7333 \quad x_4 = +\,0.8667$

sowie ferner die Verbesserungen e nach der Stationsausgl. allein. Aus (7) folgt zunächst durch Subtraction der Werthe der Verticalcolonnen 2. 3. 4 resp. von Null, x_3 und x_4:

(10)

Satz	2	3	4	Summe		Quotient
1	+0.4	+0.8333	+0.3667	+1.6000	3	+0.5333
2	+0.5	+0.2333	.	+0.7333	2	+0.3667
3	.	+0.6333	+0.9667	+1.6000	2	+0.8000

Zieht man die Quotienten von den Zahlwerthen der betr. Horizontalreihen ab, so folgt das Tableau der e:

(11)

Satz	2	3	4	Summen
1	−0.1333	+0.3000	−0.1667	+0.3000 − 0.3000
2	+0.1333	−0.1334	.	+0.1333 − 0.1334
3	.	−0.1667	+0.1667	+0.1667 − 0.1667

wonach $[ee] = 0.2267$ ist. Uebereinstimmend folgt aus (6) und (9. 9*) wegen $[ll] = 1.94$

$$[ee] = 1.94 - 1.2 \times 0.4 - 1.0 \times 0.5 - 0.2 \times 0.1 - 0.5 \times 0.3 - 0.65 \times 0.8667$$

d. i. $[ee] = 0.2267$.

Der mittlere Fehler einer Richtungsbeobachtung (Gew. 1) wird, da $n = 7$, $m = 3 + 2$ ist

(12) $$\mu = \mp \sqrt{\frac{0.2267}{2}}.$$

Stationsausgl. 2. Wir übergehen hier die Zwischenrechnungen und haben unter Annahme der

(13)

	Näherungswerthe	Verbesserungen
f. Obj. 1	0 0 0	.
„ 3	270 0 0	$+ y_3$
„ 4	315 0 0	$+ y_4$

durch Auflösung der Normalgleichungen:

(14)

y_3	y_4	
$^7/_6$	$-\,^5/_6$	− 0.2
	$^{15}/_{14}$	$+\,\frac{4.6}{7}$

(14*) Red. Normalgl.

y_3	y_4	
1	$-\,^5/_7$	− 0.1714
	1	+ 0.6133

(15) $y_3 = + 0.2666 \quad y_4 = + 0.6133.$

(16) Tableau der e:

Satz	1	3	4	Summen	
1	+0.0067	—0.3267	+0.3200	+0.3267	—0.3267
2	—0.0067	.	+0.0066	+0.0066	—0.0067
3	.	+0.3266	—0.3267	+0.3266	—0.3267

wonach $[ee] = 0.4223$ während sich dafür 0.4227 aus $[ll] = 1.81$ ergiebt: Ferner ist für die Gewichtseinheit:

$$\mu = \mp \sqrt{\frac{0.4223}{2}}. \tag{17}$$

Die Ausgleichungen für Station 3. und 4. bestehen eigentlich nur in einfachem Mittelnehmen aus den resp. beiden Sätzen; indessen kann man auch wie bei Station 1. und 2. verfahren und wir wollen beispielshalber Station 3. wie 1. behandeln, 4. dagegen in einfacher Weise ausgleichen.

Stationsausgl. 3. Unter Annahme der

		Näherungswerthe			Verbesserungen
	f. Obj. 1	0	0	0	.
(18)	„ 2	45	0	0.65	$+ z_2$
	„ 4	315	0	0.10	$+ z_4$

folgt durch Auflösung der Normalgleichungen:

(19)

z_2	z_4	
$4/3$	$-2/3$	0.00
	1	0.00

(19*) Red. Normalgl.

z_2	z_4	
1	— 0.5	0.00
	1	0.00

(20) $z_2 = 0$ $z_4 = 0$

(21) Tableau der e:

Satz	1	2	4	Summen	
1	+ 0.25	— 0.10	— 0.15	+ 0.25	— 0.25
2	— 0.25	+ 0.10	+ 0.15	+ 0.25	— 0.25

womit $[ee] = 0.1900 = [ll]$ und

$$\mu = \mp \sqrt{\frac{0.1900}{2}}. \tag{22}$$

Stationsausgl. 4. Das arithmetische Mittel beider Reihen in (4) giebt:

(23)

f. Obj.	1	0	0	0	Gew. 1
„	2	45	0	0.6	„ 1
„	3	90	0	0.9	„ 1

(24) Tableau der e:

Satz	1	2	3	Summen	
1	0.0	+ 0.4	— 0.4	+ 0.4	— 0.4
2	0.0	— 0.4	+ 0.4	+ 0.4	— 0.4

wonach $(ee) = 0.3200$ und der m. F. der Gewichtseinheit wird:

$$\mu = \mp \sqrt{\frac{0.3200}{2}}. \tag{25}$$

Im Mittel aus den 4 Stationsausgleichungen ist

$$\mu = \mp \sqrt{\frac{0.2267 + 0.4223 + 0.1900 + 0.3200}{2 + 2 + 2 + 2}} \tag{26}$$

$$= \mp \sqrt{0.1449} = \mp 0''.381.$$

Im Ganzen haben wir nun

(27)

	Resultate der Stationsausgl.	Weitere Verbesserungen
1.	$\measuredangle (2.3) = 45^0\ 0'\ 0''.7333$	$+ \xi_3$
	$\measuredangle (2.4) = 90\ 0\ 0.8667$	$+ \xi_4$
2.	$\measuredangle (1.3) = 270\ 0\ 0.2666$	$+ \eta_3$
	$\measuredangle (1.4) = 315\ 0\ 0.6133$	$+ \eta_4$

Resultate der Stationsausgl. | Weitere Verbesserungen

(27)
$$3.\ \begin{cases} \sphericalangle(1.2) = 45^0\ 0'\ 0''.6500 & +\zeta_2 \\ \sphericalangle(1.4) = 315\ 0\ 0.1000 & +\zeta_4 \end{cases}$$

$$4.\ \begin{cases} 1. = 0\ 0\ 0 & +(1)\ \text{Gew. } 1 \\ 2. = 45\ 0\ 0.6000 & +(2)\ \text{„ } 1 \\ 3. = 90\ 0\ 0.9000 & +(3)\ \text{„ } 1 \end{cases}$$

Die „weitern Verbesserungen" beziehen sich auf die Netzausgleichung. Die Bedingungsgleichungen derselben sind 3 Winkel- und 1 Seitengleichung. Bei Aufstellung derselben setzen wir das Netz als eben voraus. Das Dreieck 1. 2. 3 giebt

$$\binom{2.3}{1} + \binom{3.1}{2} + \binom{1.2}{3} - 180^0 = 0$$

d. i.

$$\left.\begin{array}{l} 45\ 0\ 0.7333 + \xi_3 \\ 89\ 59\ 59.7334 - \eta_3 \\ 45\ 0\ 0.6500 + \zeta_2 \end{array}\right\} - 180 = 0$$

der

(28) $$\xi_3 - \eta_3 + \zeta_2 + 1.1168 = 0.$$

Dreieck 1. 2. 4 giebt ebenso:

(29) $$\xi_4 - \eta_4 - (1) + (2) + 0.8534 = 0.$$

Dreieck 1. 3. 4 giebt:

(30) $$\xi_4 - \xi_3 - \zeta_4 + (3) - (1) + 0.9334 = 0.$$

Die Seitengleichung drücken wir dadurch aus, dass Seite 1.4 berechnet aus Seite 1.2 mittelst Dreieck 1. 2. 4 denselben Werth geben muss, wie mittelst der Drr. 1. 2. 3 und 1. 3. 4:

$$\frac{\sin\binom{4.1}{2}}{\sin\binom{1.2}{4}} = \frac{\sin\binom{3.1}{2}}{\sin\binom{1.2}{3}} \cdot \frac{\sin\binom{4.1}{3}}{\sin\binom{1.3}{4}}.$$

Behandeln wir diese Gleichung in der Art wie die Seitengleichungen in Beispiel 12. durch Logarithmiren, so erhalten wir in Einheiten der 7. Decimale

$$\log \sin 45^0 - 21.06\,(0.6133 + \eta_4)$$
$$- \log \sin 45^0 - 21.06\,(0.6000 - (1) + (2))$$
$$= \log \sin 45^0 - 21.06\,(0.1000 + \xi_4)$$
$$- \log \sin 45^0 - 21.06\,(0.6500 + \xi_2)$$

oder nach leichter Reduction

(31) $$-\eta_4 + \xi_2 + \xi_4 + (1) - (2) - 0.4633 = 0.$$

Zusammengestellt haben wir für die 4 Bedingungsgleichungen mit ihrer Summe das Tableau:

(32)

ξ_3	ξ_4	η_3	η_4	ζ_2	ζ_4	(1)	(2)	(3)	
+1	·	−1	·	+1	·	·	·	·	+1.1168
·	+1	·	−1	·	·	−1	+1	·	+0.8534
−1	+1	·	·	·	−1	−1	·	+1	+0.9334
·	·	·	−1	+1	+1	+1	−1	·	−0.4633
·	+2	−1	−2	+2	·	−1	·	+1	+2.4403

Setzen wir

nach (9. 9*)

$$\xi_3 - 0.5\xi_4 = v_1 \quad \text{Gew. } \frac{5}{3}$$
$$\xi_4 = v_2 \quad \text{,, } \frac{3}{4}$$

nach (14. 14*)

(33)
$$\eta_3 - \frac{5}{7}\eta_4 = v_3 \quad \text{Gew. } \frac{7}{6}$$
$$\eta_4 = v_4 \quad \text{,, } \frac{15}{14}$$

nach (19. 19*)

$$\zeta_2 - 0.5\zeta_4 = v_5 \quad \text{Gew. } \frac{4}{3}$$
$$\zeta_4 = v_6 \quad \text{,, } 1$$

so haben wir nun die v statt der $\xi\eta\zeta$ in (32) einzuführen. Dies kann hier am einfachsten geschehen durch Elimination der letzteren mittelst der (33), womit z. B. die erste Bedingungsgleichung übergeht in

$$v_1 + 0.5v_2 - v_3 - \frac{5}{7}v_4 + v_5 + 0.5v_6 \ldots + 1.1168 = 0.$$

(Dasselbe ergiebt sich, wenn man nach §. 25. (7. 7*) verfährt.)

In gleicher Weise werden die übrigen 4 Gleichungen (32) behandelt; die Summengleichung insbesondere controllirt die Substitution der aus (33) entnommenen Relationen. Es wird aber das Tableau der so umgeformten Bedingungsgleichungen:

(34)

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	(1)	(2)	(3)	
+ 1	+0.5	−1	$-\frac{5}{7}$	+1	+0.5	·	·	·	+ 1.1168
·	+1	·	−1	·	·	−1	+1	·	+ 0.8534
− 1	+0.5	·	·	·	−1	−1	·	+1	+ 0.9334
·	·	·	−1	+1	+1.5	+1	−1	·	− 0.4633
·	+2	−1	$-\frac{19}{7}$	+2	+1	−1	·	+1	+ 2.4403
$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{15}{14}$	$\frac{4}{3}$	1	1	1	1	:Gewichte

denen wir unten die Gewichte der resp. v und Richtungsverbesserungen beigesetzt haben. Damit ergeben sich die Correlatengleichungen und Normalgleichungen wie folgt:

(35)

	k_1	k_2	k_3	k_4
$\frac{5}{3}\ v_1 =$	+ 1	.	− 1	.
$\frac{3}{4}\ v_2 =$	+ 0.5	+ 1	+ 0.5	.
$\frac{7}{6}\ v_3 =$	− 1	.	.	.
$\frac{15}{14}\ v_4 =$	$-\frac{5}{7}$	− 1	.	− 1
$\frac{4}{3}\ v_5 =$	+ 1	.	.	+ 1
$v_6 =$	+ 0.5	.	− 1	+ 1.5
(1) =	.	− 1	− 1	+ 1
(2) =	.	+ 1	.	− 1
(3) =	.	.	+ 1	.

(36)

k_1	k_2	k_3	k_4	
+ 3.2666	+ 1.3333	— 0.7667	+ 2.1667	+ 1.1168
+ 1.3333	+ 4.2667	+ 1.6667	— 1.0667	+ 0.8534
— 0.7667	+ 1.6667	+ 3.9333	— 2.5000	+ 0.9334
+ 2.1667	— 1.0667	— 2.5000	+ 5.9333	— 0.4633
+ 5.9999	+ 6.2000	+ 2.3333	+ 4.5333	+ 2.4403

Hieraus folgt das Tableau:

(37)

k_1	k_2	k_3	k_4	
+ 3.2666	+ 1.3333	— 0.7667	+ 2.1667	+ 1.1168
	+ 3.7225	+ 1.9796	— 1.9511	+ 0.3976
		+ 2.7006	— 0.9539	+ 0.9841
			+ 3.1366	— 0.6481

und ferner die reducirten Normalgleichungen:

(37*)

k_1	k_2	k_3	k_4	
1	+0.40816	—0.23471	+0.66329	+0.34188
	1	+0.53179	—0.52413	+0.10681
		1	—0.35322	+0.36440
			1	—0.20663

womit sich ergeben

(38)

$$k_1 = - 0.61120$$
$$k_2 = + 0.15646$$
$$k_3 = - 0.29141$$
$$k_4 = + 0.20663$$

welche die erste Summengleichung erfüllen. Aus (35) folgt damit

$$
\begin{array}{ll}
\frac{5}{3}\, v_1 = -0.3198 & v_1 = -0.1919 \\
\frac{3}{4}\, v_2 = -0.2949 & v_2 = -0.3932 \\
\frac{7}{6}\, v_3 = +0.6112 & v_3 = +0.5239 \\
\frac{15}{14}\, v_4 = +0.0735 & v_4 = +0.0686 \\
\frac{3}{4}\, v_5 = -0.4046 & v_5 = -0.3035 \\
v_6 = +0.2958 & . \quad . \\
(1) = +0.3416 & . \quad . \\
(2) = -0.0502 & . \quad . \\
(3) = -0.2914 & . \quad .
\end{array} \tag{39}
$$

und es ist die Summe der in ihre Gewichte multiplicirten Quadrate dieser Verbesserungen, d. i. $\underline{[vv]}$ gleich 0.9168. Dagegen hat man aus den Tableaux (37) und (37*) in guter Uebereinstimmung nach §. 25. (17)

$$\underline{[vv]} = 0.9170 \tag{40}$$

der mittlere Fehler der Beobachtung wird damit:

$$\mu = \mp \sqrt{\frac{0.9168}{4}} = \mp 0.479. \tag{41}$$

Die Gleichungen (33) geben nun

$$
\begin{array}{r}
\xi_3 = -0.3885 \\
\xi_4 = -0.3932 \\
\eta_3 = +0.5729 \\
\eta_4 = +0.0686 \\
\zeta_2 = -0.1556 \\
\zeta_4 = +0.2958 \\
(2)-(1) = -0.3918 \\
(3)-(1) = -0.6330
\end{array} \tag{42}
$$

und damit werden nach (27) die Ausgleichungsresultate

(43)

$$
\begin{aligned}
1.&\begin{cases} 2. = & 0 & 0 & 0 \\ 3. = & 45 & 0 & 0.3448 \\ 4. = & 90 & 0 & 0.4735 \end{cases}\\
2.&\begin{cases} 1. = & 0 & 0 & 0 \\ 3. = & 270 & 0 & 0.8395 \\ 4. = & 315 & 0 & 0.6819 \end{cases}\\
3.&\begin{cases} 1. = & 0 & 0 & 0 \\ 2. = & 45 & 0 & 0.4944 \\ 4. = & 315 & 0 & 0.3958 \end{cases}\\
4.&\begin{cases} 1. = & 0 & 0 & 0 \\ 2. = & 45 & 0 & 0.2082 \\ 3. = & 90 & 0 & 0.2670 \end{cases}
\end{aligned}
$$

welche in der That die 4 Bedingungsgleichungen erfüllen.

Wir berechnen nunmehr die Gesammtverbesserungen λ der Richtungsbeobachtungen. Für Station 1. z. B. haben wir aus (11) mittelst Addition von ξ_3 zur Verticalcolumne 3 und von ξ_4 zur Verticalcolumne 4 zunächst:

(44)

Satz	2	3	4	Summe		Quotient
1	—0.1333	—0.0885	—0.5599	—0.7817	3	— 0.2606
2	+0.1333	—0.5219	.	—0.3886	2	— 0.1943
3	.	—0.5552	—0.2265	—0.7817	2	— 0.3908

Die Quotienten sind die negativen Werthe der Verbesserungen der u der betr. Sätze wegen der Netzausgleichung. Zieht man sie von den Zahlen des zugehörigen Satzes ab, so wird das Tableau der λ erhalten:

(45)

Satz	2	3	4	Summen	
1	+ 0.1273	+ 0.1719	— 0.2993	+ 0.2992	— 0.2993
2	+ 0.3276	— 0.3276	.	+ 0.3276	— 0.3276
3	.	— 0.1644	+ 0.1643	+ 0.1643	— 0.1644

Bequemer ist es, dieses Tableau aus 1. direct abzuleiten mittelst der Endresultate (43) für Station 1. Es sind nämlich die Verbesserungen der Beobachtungswerthe (1) auf diese Endresultate:

(46)

Satz	2	3	4	Summen		Quotient
1	0	+ 0.0448	— 0.4265	— 0.3817	3	— 0.1272
2	0	— 0.6552	.	— 0.6552	2	— 0.3276
3	.	+ 0.3448	+ 0.6735	+ 1.0183	2	+ 0.5092

woraus durch Subtraction der Quotienten von den Werthen der betr. Horizontalreihen wieder (45) hervorgeht.

Man hat ebenso als Tableau der λ

für Station 2: (47)

Satz	1	3	4	Summen	
1	— 0.2071	+ 0.0324	+ 0.1748	+ 0.2072	— 0.2071
2	— 0.0410	.	+ 0.0409	+ 0.0409	— 0.0410
3	.	+ 0.5788	— 0.5788	+ 0.5788	— 0.5788

für Station 3: (48)

Satz	1	2	4	Summen	
1	+ 0.2033	— 0.3023	+ 0.0991	+ 0.3024	— 0.3023
2	— 0.2967	— 0.1023	+ 0.3991	+ 0.3991	— 0.3990

für Station 4: (49)

Satz	1	2	3	Summen	
1	+ 0.3416	+ 0.3498	— 0.6914	+ 0.6914	— 0.6914
2	+ 0.3416	— 0.4502	+ 0.1086	+ 0.4502	— 0.4502

(50) $(\lambda\lambda) = 0.4040 + 0.7479 + 0.4004 + \frac{1.0482}{2} = 2.0764.$

Andrerseits ist nach §. 25. (17) . . . .

$$(\lambda\lambda) = \{0.2267+0.4227+0.1900+0.3200\} + 0.9170 = 2.0764$$

was eine befriedigende Uebereinstimmung gewährt.

Der mittlere Fehler einer Richtungsbeobachtung vom Gewicht 1 wird:

$$(51) \qquad \mu = \mp\sqrt{\frac{2.0764}{8+4}} = \mp\sqrt{0.1730} = \mp 0''.416.$$

In Bezug auf die verschiedenen Werthe von μ nach Formel (12. 17. 22. 25 resp. 26 und 41) ist zu erwähnen, dass sie sämmtlich innerhalb der rechnungsmässigen Grenzen übereinstimmen (§. 15. III). Wir können uns daher bei unsrer Art der Ausgleichung beruhigen, welche eben voraussetzt, dass nicht nur für alle Stationen der Einheit des Gewichts gleicher mittlerer Fehler zukomme, als auch, dass die Netzausgleichung keine neuen, bei der Stationsausgleichung verborgen gebliebenen Fehlerursachen andeute.

Hätte sich bei den Stationsausgleichungen mit Sicherheit herausgestellt, dass die mittleren Fehler der Gewichtseinheiten verschiedener Stationen erheblich verschieden sind, so hätte diesem Umstande bei der Netzausgleichung Rechnung getragen werden müssen durch angemessene proportionale Veränderung der Gewichte der v der betreffenden Stationen. Fehlerhaft würde dieses Verfahren nur dann, wenn die Netzausgleichung erheblich grössere Fehler als die Stationsausgleichungen anzeigte. Alsdann ist es überhaupt richtiger, nachdem die Stationsausgleichung zu Ende ist, die Ergebnisse derselben so aufzustellen und anzusehen, als wäre auf jeder Station nur ein Satz aller Richtungen beobachtet worden und zwar durchgängig mit gleichem Gewichte. Dieses Verfahren setzt nur voraus, dass auf allen Stationen für jede beobachtete Richtung ungefähr gleiches Gewicht erzielt worden ist, was zumeist mit genügender Annäherung zutreffen wird.

Um zu ermitteln, mit welcher Genauigkeit der Punkt 4. gegen die Linie 1.2 festgelegt worden ist, nehmen wir 1.2 = 100000 Längeneinheiten als gegeben an und beziehen 4. durch Polarcoordinaten mit dem Ursprunge 1. und der Axe 1.2 auf die Punkte 1. und 2. Wir haben nun, Seite 1.4 mit r_4 und die Anomalie derselben d. i. Winkel $\binom{2.4}{1}$ mit ψ_4 bezeichnet:

$$(52) \qquad r_4 = 100000 \frac{\sin\binom{4.1}{2}}{\sin\binom{1.2}{4}} \qquad \psi_4 = \binom{2.4}{1}$$

also nach (27)

$$(53) \quad \log r_4 = 5 - (0.6000 + (2) - (1) + 0.6133 + \eta_4)\, 0.000002106$$

$$(54) \qquad \psi_4 = 90^0\ 0'\ 0''.8667 + \xi_4$$

woraus folgt, indem man erstens die Werthe der Verbesserungen einsetzt

$$(55) \qquad \log r_4 = 4.9999981.3 \qquad \psi_4 = 90^0\ 0'\ 0''.4735$$

und indem man zweitens differenzirt

$$(56) \qquad \frac{dr_4}{d\eta_4} = \frac{dr_4}{d(2)} = -\frac{dr_4}{d(1)} = -0.4849; \quad \frac{d\psi_4}{d\xi_4} = 1.$$

Hiermit ist man zur Kenntniss der sämmtlichen Differentialquotienten F (§. 25. III) der beiden Functionen r_4 und ψ_4 der Beobachtungsgrössen, soweit sie nicht Null sind, gelangt. Daraus erhalten wir mit Hülfe der (33) (oder mit Hülfe der Tableaux (8. 14. 19)) die folgenden Differentialquotienten f

$$(57) \qquad \frac{dr_4}{dv_4} = -0.4849 = \frac{dr_4}{d(2)} = -\frac{dr_4}{d(1)}; \quad \frac{d\psi_4}{dv_2} = 1.$$

Wir berechnen daraus weiter mit Hülfe der 1. 2. 3. 4. Gleichung (34) resp. die Werthe $[pf]$ $[qf]$ u. s. f. für r_4.

Zunächst ist:

$$[pf] = \frac{\frac{5}{7} \times 0.4849}{\frac{15}{14}} = +0.3233$$

und ähnlich sind die übrigen Summen gleich

$$-0.5172, \quad -0.4849, \quad +1.4224.$$

Die Summe 0.7436 hiervon ist in Uebereinstimmung mit der Bildung von $[sf] = 0.7435$ aus der Summengleichung (34).

Für ψ_4 hat man $+0.6667$, $+1.3333$, $+0.6667$, 0.0 mit der Summe $+2.6667$.

Setzt man nun $\mu_{r_4}^2 = \mu^2(\mathrm{I} - \mathrm{II})$, so berechnen sich die Zähler von II mittelst Tabl. (36) durch Uebergang zu Tabl. (37) und man hat:

$$I = \frac{(-0.4849)^2}{\frac{15}{14}} + \frac{(+0.4849)^2}{1} + \frac{(-0.4849)^2}{1} = 0.6897$$

$$II = \frac{(+0.3233)^2}{3.2666} + \frac{(-0.6492)^2}{3.7225} + \frac{(-0.0638)^2}{2.7006} + \frac{(+0.8452)^2}{3.1366} = 0.3745$$

(58) $\mu^2_{r_4} = 0.3152\mu^2 = 0.3152 \times 1730$

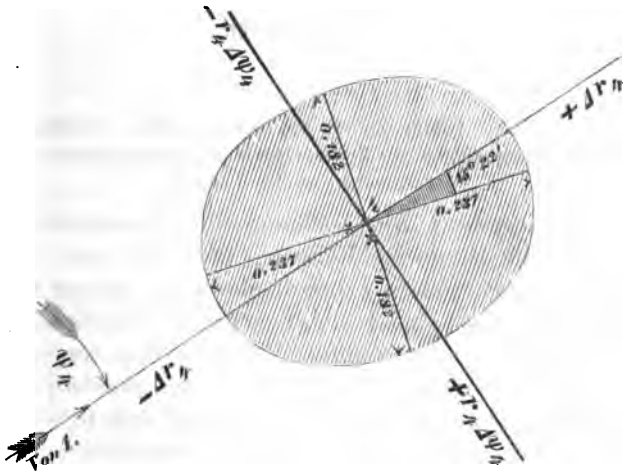
$\mu_{r_4} = \mp 0.233$ Längeneinheiten.

In ähnlicher Weise findet man für ψ_4

$$I = \frac{4}{3} = 1.3333$$

$$II = \frac{(+0.6667)^2}{3.2666} + \frac{(+1.0612)^2}{3.7225} + \frac{(+0.2589)^2}{2.7006} + \frac{(+0.2054)^2}{3.1366} = 0.4767$$

(59) $\mu^2_{\psi_4} = 0.8566\mu^2$ $\mu_{\psi_4} = \mp 0''.385.$



Die Fehlerellipse für Punkt 4. Wenn wir als Function $F' \ldots \Delta r_4$ und als $F'' \ldots r_4 \Delta\psi_4$ nehmen, worin Δr_4 Aenderungen des ausgeglichenen Werthes von r_4 und $\Delta\psi_4$ Aenderungen des ausgeglichenen Werthes von ψ_4, in Bogenmaass, bedeuten, so ist

$$Q_{1.1} = 0.3152 \qquad Q_{2.2} = \frac{0.8566}{(206265)^2}(100000)^2 = 0.2013$$

$$Q_{1.2} = \frac{100000}{206265}\{0.0 - (0.06598 - 0.18508 - 0.00611 + 0.05535)\}$$

$$= +0.03387.$$

Damit wird

$$\text{(60)} \qquad \begin{aligned} \cot 2N &= 1.681 \quad 2N = 30^0\,44' \\ N_1 &= 15^0\,22' \quad N_2 = 105^0\,22' \end{aligned}$$

und die Halbaxen in Richtung von N_1 und N_2 werden, $\mu^2 = 0.1730$ gesetzt,

$$\text{(61)} \qquad \begin{aligned} &\sqrt{0.1730\,(0.2013 + 0.03387 \times 3.639)} \\ &\text{d. i. } \mp 0.237 \text{ Längeneinheiten} \\ &\sqrt{0.1730\,(0.2013 - 0.03387 \times 0.275)} \\ &\text{d. i. } \mp 0.182 \text{ Längeneinheiten.} \end{aligned}$$

V. Abschnitt.

§. 29.

Untersuchung der Fehler einer Beobachtungsreihe. Einfluss regelmässiger Fehlerursachen auf die Vertheilung übrigbleibender Fehler λ. Verschiedene solche Ursachen.

Nach beendeter Ausgleichung einer Beobachtungsreihe wird sich die Frage aufdrängen, inwieweit man aus den übrigbleibenden Fehlern λ beurtheilen kann, ob nur zufällige oder auch regelmässige Fehlerursachen zur Entstehung der den λ entsprechenden wahren Fehler ε beigetragen haben und welcher Form $\varphi(\varepsilon)$ ist, um zu entscheiden, ob die Rechnungsergebnisse wahrscheinlichste Resultate sind oder nur grösste Gewichte haben oder ob denselben auch diese Eigenthümlichkeit abgeht. (§. 12. S. 93.)

Kann man sich nur an Fehler λ, nicht aber an wahre Fehler ε wenden, so hat die Untersuchung nur dann Sinn, wenn die Anzahl der überschüssigen Messungen hoffen lässt, sich der Wahrheit hinlänglich genähert zu haben, um annehmen zu können, dass die λ und ε nicht zu sehr verschieden sind und daher $\varphi(\lambda)$ und $\varphi(\varepsilon)$ angenähert übereinstimmen. Wenn indessen die wahren Fehler ε theilweise von regelmässigen und constanten Fehlerursachen herrühren und in Folge dessen das Vertheilungsgesetz derselben nicht gerade ist, so führt eine vermehrte Anzahl Controllen bei

Ausgleichung nach der M. d. kl. Qu. nicht näher an die wahren Werthe, sondern auf gewisse andere Werthe, die um so mehr verschieden von den wahren sind, je grösser die Abweichung des Fehlergesetzes von erwähnter Eigenschaft ist. (Laplace hat dies genauer in seiner Theorie der Wahrsch. untersucht.) Die λ werden in diesem Falle im Allgemeinen eine andere Vertheilung befolgen als die wahren Fehler und wir werden zunächst untersuchen, um wieviel jedes λ sich anders ergiebt, als ohne Vorhandensein der regelmässigen Fehler.

I. Einfluss einer Ursache regelmässiger Fehler auf die übrigbleibenden Fehler λ der Ausgleichung bei vermittelnden Beobachtungen. Sei die Form der Fehlergleichungen in üblicher Bezeichnungsweise

$$\lambda = -l + ax \qquad \varepsilon = -l + aX \tag{1}$$

wobei wir uns auf eine Unbekannte beschränken. Der wahre Fehler ε bestehe aus einem zufälligen Theile ε' und einem regelmässigen Theile $-bY$, worin b irgend eine von Beobachtung zu Beobachtung (gesetzmässig) sich ändernde Grösse (z. B. eine Function der Zeit oder eine Function von a), Y eine Constante sei:

$$\varepsilon = \varepsilon' - bY \tag{2}$$

alsdann geht der obige Ausdruck für ε über in

$$\varepsilon' = -l + aX + bY. \tag{3}$$

Wären uns die b bekannt, so würden wir Y als zweite Unbekannte durch die Ausgleichung ermitteln können. Die Fehlergleichungen erhielten dafür die Form

$$\lambda' = -l + ax + by \tag{4}$$

und man hätte die Normalgleichungen

$$\begin{aligned}(aa)x + (ab)y &= (al)\\ (ab)x + (bb)y &= (bl)\end{aligned} \tag{5}$$

daraus aber für die Unbekannten X und Y die Werthe:

$$\begin{aligned}y &= \frac{(bl.1)}{(bb.1)} = \chi_2\\ x &= \frac{(al)}{(aa)} - \frac{(ab)}{(aa)}\frac{(bl.1)}{(bb.1)} = \chi_1 - \chi_2 a_1'\end{aligned} \tag{6}$$

und endlich würde erhalten werden:

(7) $$\lambda' = -l + a\chi_1 + (b - a\alpha_1')\chi_2.$$

Die Ausgleichung der Fehlergleichungen λ nach (1) ergiebt dagegen

(8) $$x = \frac{(al)}{(aa)} = \chi_1$$

womit

(9) $$\lambda = -l + a\chi_1$$

und ist daher

(10) $$\lambda' - \lambda = (b - a\alpha_1')\chi_2$$

oder auch

(11) $$\lambda = \lambda' + (a\alpha_1' - b)\chi_2.$$

Die λ' werden, nur von zufälligen Fehler herstammend, bei hinreichender Controllenanzahl eine Vertheilung zeigen, die angenähert derjenigen zufälliger Fehler entspricht. Die λ werden dagegen diese Vertheilung nicht zeigen, da sie einen Theil enthalten, welcher ein ganz verschiedenes Gesetz befolgt. Wir sehen daraus:

Bei Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen nach der Methode der kl. Qu. wird das Vertheilungsgesetz der Verbesserungen λ im Allgemeinen eine vorhandene regelmässige Fehlerursache anzudeuten vermögen.

Eine Ausnahme zeigt aber schon unser einfaches Beispiel; wenn nämlich allgemein

(12) $$a\alpha_1' - b = 0$$

ist d. h. wenn a und b für alle Beobachtungen ein constantes Verhältniss besitzen, dann wird die constante Fehlerursache durch die übrigbleibenden Fehler λ nicht angedeutet, weil nach (11) in diesem Falle $\lambda = \lambda'$ wird. Trotzdem wird aber der Werth von x fehlerhaft erhalten, nämlich nach (8) gleich χ_1 anstatt nach (6) $\chi_1 - \alpha_1' Y$.

So wird aus den λ directer Beobachtungen (gleicher Genauigkeit) einer Grösse nichts über einen allen Beobachtungen anhaftenden constanten Fehler zu entnehmen und aus den λ einer Stationsausgleichung nie ein Schluss auf constante Lateralrefractionen zu ziehen sein, weil in den Fehlergleichungen ein für dieselbe in Bezug auf eine

bestimmte Richtung eingeführtes Glied y immer denselben Coefficienten ± 1 wie die Richtung selbst haben wird. Dagegen würde eine vom Stande der Sonne abhängige beträchtliche Lateralrefraction (b eine Function des Sonnenstandes) bewirken, dass die λ der betr. Visuren für gleichen Sonnenstand sich vorherrschend mit gleichen Vorzeichen ergeben würden.

II. Wir betrachten noch einen einfachen Fall bedingter Beobachtungen. Seien $l_1\ l_2\ldots$ die Beobachtungswerthe und

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + a_1 X, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_2' + a_2 X_\lambda \ldots$$

die wahren Beobachtungsfehler und zwar ε' der zufällige, aX der regelmässige Theil, so geht eine Bedingungsgleichung der Form

$$(13) \qquad p_0 + p_1(l_1 + \varepsilon_1) + p_2(l_2 + \varepsilon_2) + \ldots = 0$$

über in (§. 5. S. 39).

$$(14) \qquad p_1\varepsilon_1 + p_2\varepsilon_2 + \ldots + w_1 = 0$$

einerseits, andrerseits in

$$(15) \qquad p_1\varepsilon_1' + p_2\varepsilon_2' + \ldots + [ap]X + w_1 = 0.$$

Für die Ausgleichung hat man zu setzen anstatt (14) resp. (15)

$$(14^*) \qquad p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + \ldots + w_1 = 0$$

$$(15^*) \qquad p_1\lambda_1' + p_2\lambda_2' + \ldots + [ap]x + w_1 = 0$$

woraus folgt

$$(16) \qquad p_1(\lambda_1' - \lambda_1) + p_2(\lambda_2' - \lambda_2) + \ldots + [ap]x = 0$$

und ebenso für andere Bedingungsgleichungen.

Es sind daher die Differenzen $\lambda' - \lambda$ Functionen von x und da nun (bei zahlreichen Bedingungsgleichungen) die λ' die Vertheilung zufälliger Fehler annehmen werden, so werden die λ diese Vertheilung nicht mehr zeigen. Die Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen ist daher auch im Allgemeinen geeignet, constante und regelmässige Fehlerquellen anzudeuten; in dem Falle jedoch nicht, wo wegen

$$(17) \qquad [ap] = 0$$

die λ und λ' einander gleich werden. Wenn also der regelmässige Theil der Fehler die Bedingungs-

gleichungen erfüllt, so ist an der Vertheilung der λ nichts von dem Vorhandensein der regelmässigen Fehlerursache zu bemerken. Die ausgeglichenen Beobachtungswerthe sind alsdann nur wegen $\lambda = \lambda'$ verbessert und um das regelmässige Glied aX fehlerhaft.

So wird ein geschlossener Zug eines geometrischen Nivellements oftmals sehr fehlerhaft sein können, ohne dass es im Zusammenschluss zu bemerken ist: Nivellirt man von einem Berg thalwärts und nimmt die Distanzen vorwärts immer grösser als rückwärts, $D_v > D_r$ und ist die Convergenz der Libellen- und Visiraxe nach dem Objecte zu in Bogen gleich c, so ist die Differenz der Zielhöhen vor und zurück zu gross um $(D_v - D_r)c$ und daher, wenn H das Nivellirungsresultat für die Höhe des Berges über dem Thale bedeutet, die Höhe genauer gleich

$$H - ([D_v] - [D_r])c. \tag{18}$$

Nennt man ε den zufalligen Messungsfehler in H, so wird die wahre Höhe gleich

$$H + \varepsilon - ([D_v] - [D_r])c. \tag{18*}$$

Nivellirt man zurück bergwärts und nimmt die Distanzen vorwärts kleiner als rückwärts, $D'_v < D'_r$, so wird das Ergebniss H' zu gross um $[D_r' - D_v']c$ und daher die wahre Höhe gleich:

$$H' + \varepsilon' + ([D_v'] - [D_r'])c \tag{19}$$

worin ε' den zufälligen Messungsfehler in H' bedeutet.

Es ist aber die Differenz der wahren Höhen gleich Null:

$$H - H' - ([D_v] - [D_r])c - ([D_v'] - [D_r'])c + \varepsilon - \varepsilon' = 0 \tag{20}$$

und der Ausnahmefall tritt ein für

$$([D_v] - [D_r]) + ([D'_v] - [D'_r]) = 0. \tag{21}$$

Will man daher bei geometrischen Nivellements aus localen Gründen nicht gleiche Distanzen rück- und vorwärts nehmen, so muss man mit Schärfe $c = 0$ machen und zu grösserer Sicherheit Sorge tragen, dass die höchsten und tiefsten Punkte auf verschiedenen Wegen verbunden werden, so dass man erwarten kann, es werde der Ausnahmefall nicht eintreten und daher Gl. (20) zugleich Controllgleichung für die bezüglich c genügende Justirung des Instruments sein.

Ein Beispiel, wo der Ausnahmefall kaum jemals eintreten wird, bietet die Triangulation. In den Bedingungsgleichungen derselben werden ebensowohl grössere Lateralrefractionen sich fühlbar machen, wie auch ein Instrumentalfehler der Art, dass alle Winkel zu klein gemessen werden.

II. Zu den Ursachen constanter und regelmässiger Fehler zählen vor Allem die Instrumentalfehler, ferner die persönlichen Fehler, die Fehler der Theorie u. A. m.

Die erstern lassen sich in der Regel vermeiden, doch zeigt die Geschichte der feinern Messkunst, dass es der vereinten Bemühungen vieler geschickter Künstler und ingeniöser Beobachter bedurft hat, um dahin zu gelangen, die Grösse der Instrumentalfehler einerseits im besondern Falle auf ein wünschenswerthes Maass herabdrücken zu können, andrerseits aber sie alle kennen zu lernen und die Methoden zu ihrer Elimination durch Rechnung oder Beobachtung auszubilden.

Als persönliche Fehler bezeichnet man diejenigen regelmässigen Beobachtungsfehler, welche aus der Unvollkommenheit der menschlichen Sinneswerkzeuge hervorgehen. Nicht nur, dass die Sinneseindrücke uns erst nach Verlauf einer merkbaren, wenn auch kleinen, Zeit zum Bewusstsein kommen: die Sinneswerkzeuge reproduciren auch die von aussen anlangenden Anregungen nicht richtig für das Bewusstsein, sondern in, sagen wir tendenziöser Weise, unrichtig. Ein gerade für die Geodäsie auch wichtiges Beispiel mag dies erläutern:

Ein Beobachter wird im Allgemeinen, wenn er die Mitte zwischen zwei Punkten schätzen soll, einen Irrthum begehen, der theilweise ein constanter ist, indem wiederholte Versuche nicht auf die wahre Mitte, sondern auf einen dazu excentrischen Punkt als scheinbare Mitte hinweisen. Die Grösse der Excentricität ist für verschiedene Beobachter verschieden, sie ändert sich auch für denselben Beobachter mit der Lage der Verbindungslinie der beiden Punkte, sowie mit der Zeit und der körperlichen Disposition. Aehnliche Fehler hat man für Schätzungen einzelner Bruchtheile der Strecke zwischen zwei Punkten. Der per-

sönliche Fehler bei Schätzungen in die Mitte kann eintreten bei dem Einstellen eines Visirfernrohres oder eines Mikroskopmikrometers auf ein Object. Um ihn möglichst zu vermeiden, passt man die Dimensionen des Objects und Fadens einander so an, dass entweder das Bild des Objects nur unbedeutend breiter ist, als ein Faden, oder dass zwei parallele Fäden einen nur wenig grössern Abstand haben als der Durchmesser des Bildes des Objects. Im erstern Falle muss das Bild den Faden gerade noch merkbar überragen; im zweiten muss ein gerade noch bemerkbarer Zwischenraum zu beiden Seiten des Bildes bleiben. Alsdann sind die beiden Grössen, von deren richtiger Abschätzung alles abhängt, so klein, dass ein Irrthum, welcher doch nur ein Bruchtheil einer solchen betragen kann, unschädlich wird. Denken wir uns beispielsweise, dass bei Winkelmessungen der Faden 10″, dass Object 12″ breit erscheint, so wird die Differenz $12 - 10 = 2$ durch Schätzung in 2 Hälften zu theilen sein. Fehlten wir um 0″.5 bei der Einstellung, so würde die Ueberragung des Objectbildes einerseits $(1 - 0.5) = 0''.5$, andrerseits $(1 + 0.5) = 1''.5$ betragen; die Breiten der Ueberragungen würden sich wie 1 : 3 verhalten, was gewiss sehr auffällig werden würde. Es wird also ein Fehler von 0″.5 Secunden kaum stattfinden.

Als Fehler der Theorie bezeichnet man eine unrichtige Angabe der Function, welche die Relationen zwischen den beobachteten Grössen ausdrückt. Es kann dies u. A. dadurch herbeigeführt werden, dass eines Instrumentalfehlers nicht gedacht wurde, zufolge dessen den Fehlergleichungen vermittelnder Beobachtungen noch ein Glied beizufügen gewesen wäre, in welchem der Instrumentalfehler als zu bestimmende Unbekannte erscheint — wie etwa bei Beobachtungen von Azimutalwinkeln an einem Universale mit excentrischem Fernrohre ein Glied, welches von der lateralen Biegung des Fernrohres (als Function der Zenithdistanz) herrührt.

§. 30.

Untersuchung der Fehler zur Feststellung der wichtigsten Eigenschaften ihres Vertheilungsgesetzes, insbesondere bezüglich der Einwirkung regelmässiger Fehlerursachen. Bemerkung zu einem Einwurf gegen die M. d, kl. Q. Prüfung der Gewichtsannahme.

I. Um das Gesetz der Vertheilung der wahren Beobachtungsfehler einer gewissen Beobachtungsart kennen zu lernen, kann man in manchen Fällen den directen Weg einschlagen, dass man die beobachteten Grössen auf andere und so scharfe Weise ermittelt, dass sie als absolut richtig dem zu untersuchenden Beobachtungsverfahren gegenüber anzusehen sind.

Mit Erfolg wird diese Methode in der Astronomie zur Ermittlung regelmässiger, insbesonders persönlicher Fehler angewandt. O. Struve bestimmte durch Messung künstlicher Doppelsterne (deren Entfernung und Lage also gegeben war) die regelmässigen (= persönlichen) Fehler seiner Messungen in cölestischen Doppelsternen. Im allgemeinen Gebrauche, ferner, sind jetzt auf Sternwarten Apparate, mit denen jeder Beobachter zu jeder Zeit ermitteln kann, um wieviel er zu spät oder zu früh den Durchgang eines Sternes durch einen Faden beobachtet.

Auch die Geodäsie bietet Anwendungen dieses Verfahrens, die wahren Beobachtungsfehler kennen zu lernen:

Messen wir z. B. mittelst Basis und Triangulation eine Anzahl Längen indirect, so können wir, Kettenmessungen dieser Längen gegenüber, die Angaben des ersten Verfahrens als absolut richtig annehmen und erhalten damit die wahren Beobachtungsfehler als Differenzen der genauen Längen und den Ergebnissen der Kettenmessungen.

Nivelliren wir (geometrisch) mit einer Latte zum Selbstablesen, die auf Vorder- und Rückseite gleich getheilt, aber in entgegengesetzten Richtungen beziffert ist und lesen für jeden Punkt beide Seiten ab, so wird die Summe der Ablesungen eine constante Grösse sein müssen, die man direct mit grosser Schärfe ermitteln kann. Die Abweichungen der abgelesenen Summe von der wahren ist sodann gleich der Summe der beiden wahren Ablesungsfehler, die aber ange-

sehen werden kann als ein wahrer Fehler: nämlich in der Beobachtung der constanten Summe.

Messen wir eine Anzahl trigonometrischer Dreiecke in allen drei Winkeln, so ergiebt sich durch Vergleichung der theoretischen Winkelsumme mit der beobachteten die Summe der wahren Fehler der 3 Beobachtungen, die man als einen wahren Fehler zusammenfassen kann in der Beobachtung der Winkelsumme des Dreiecks (solange die Dreiecke unabhängig von einander sind).

Um den Fehler der Schätzung in die Mitte zwischen zwei Punkte kennen zu lernen, bedarf es nur der genauen Halbirung der durch Schätzung getheilten Strecken.

II. **Vertheilungsgesetz.** Ist eine grössere Anzahl n wahrer Fehler ε oder ausgeglichener Verbesserungen λ gegeben, so wird es sich darum handeln, zu untersuchen, welches Vertheilungsgesetz sie zum Ausdruck bringt. In beiden Fällen ist der Gang der Untersuchung derselbe ohne Rücksicht, ob man ε oder λ vor sich hat; erst bei weiterer Anwendung des erhaltenen Resultats derselben muss man auf letzteren Umstand Rücksicht nehmen. Um dies nicht zu vergessen, wollen wir vorläufig in beiden Fällen die Fehler mit λ, ihr Vertheilungsgesetz mit $\varphi(\lambda)$ bezeichnen.

Die Bestimmung von $\varphi(\lambda)$ als einer stetigen Function unterliegt denselben Schwierigkeiten als die Ermittlung einer Curve aus einzelnen Punkten. In der Regel genügt man aber dem praktischen Bedürfnisse, indem man nur einige Haupteigenschaften von $\varphi(\lambda)$ feststellt.

Wir setzen nun immer eine gleiche Genauigkeit der Beobachtungen voraus, im andern Falle hat man vor der Untersuchung die Fehler auf gleiches Gewicht zu reduciren (§. 16.).

Ist die Anzahl der λ sehr gross, so kann man entsprechend den Bemerkungen §. 3. pag. 15 wie folgt $\varphi(\lambda)$ annähernd bestimmen. Man bildet von Null aus eine Anzahl positiver und negativer Hauptwerthe Δ in gleichen Intervallen Δ, zählt die jedem Δ zufallenden λ und dividirt durch die Anzahl aller λ. Ist $\Phi(\Delta)$ ein solcher Quotient, so ist genähert:

(1) $$\Phi(\Delta) = \varkappa\varphi(\Delta)\Delta$$
$$\Phi(0) = \varkappa\varphi(0)\Delta$$

daher auch für $\varphi(0) = c$:

(2) $$\frac{\varphi(\Delta)}{\varphi(0)} = \frac{\Phi(\Delta)}{\Phi(0)} \qquad \varphi(\Delta) = c\,\frac{\Phi(\Delta)}{\Phi(0)}.$$

Legt man nun durch die Punkte mit den Abscissen Δ und Ordinaten $\Phi(\Delta) : \Phi(0)$ eine Curve, so giebt diese ein Bild der Curve $\varphi(\lambda)$, wobei nur die Ordinaten im Verhältniss $c : 1$ zu gross sind: die Ordinaten geben näherungsweise das Verhältniss $\varphi(\lambda) : \varphi(0)$ an.

A. Unter den Fragen nach den Eigenschaften von $\varphi(\lambda)$ hat zuerst ein Interesse die Frage, ob $\varphi(\lambda)$ eine gerade Function, d. h. $\varphi(+\lambda) = \varphi(-\lambda)$ ist.

Meist kann man sich begnügen, in dieser Hinsicht zu untersuchen, ob

(3) die Anzahl der positiven Fehler = der Anzahl der negativen Fehler

(4) die Summe der Quadrate der positiven Fehler = der Summe der Quadrate der negativen Fehler

und, falls nicht zufolge der Form der Ausgleichungsaufgabe $[\lambda]$ nothwendig Null ist, ob

(5) die Summe der positiven Fehler = der Summe der negativen Fehler.

In besonderen Fällen wird man ausserdem eine ähnliche Untersuchung vornehmen, die sich aber nicht auf alle Fehler, sondern nur auf die Fehler zwischen zwei Grenzen $\mp\lambda_m$ erstreckt, die etwa die Hälfte aller Fehler einschliessen.

Sehr förderlich, auch für die Untersuchung weiterer Eigenschaften von $\varphi(\lambda)$ ist es:

(6) .. die λ ihrer Grösse nach zu ordnen.

B. Wie das Ergebniss bis hierher auch sei, so wird man jetzt festzustellen haben, ob $\varphi(\lambda)$ eine im Allgemeinen mit dem Wachsthume des absoluten Werthes von λ abnehmende Function ist:

Nehmen wir zunächst den Grenzfall vor, wo $\varphi(\lambda) = c$, einer Constanten, $\lambda^2 \leq a^2$, so wird die Wahrscheinlichkeit W,

dass ein λ zwischen den Grenzen $\mp \beta\mu_\lambda$ liege (β ein beliebiger Coefficient) nach §. 3. III. gleich $\beta\mu_\lambda : a$. Ist nun n die Anzahl aller Fehler, so folgt daraus mit Rücksicht auf §. 3. (17*).

$$\varphi(\lambda) = c,$$

(7)

Anzahl der λ zwischen den Grenzen:		gleich
	$\mp \beta\mu_\lambda$	$0.57735\,\beta n$
„	$\mp 1.15470\,\mu_\lambda$	„ $0.66667\,n$
„	$\mp \mu_\lambda$	„ $0.57735\,n$
„	$\mp 0.86603\,\mu_\lambda$	„ $0.50000\,n$

Ist für $\beta \leqq \sqrt{\frac{4}{3}}$ die Anzahl der Fehler zwischen diesen Grenzen grösser, so geht aus den Untersuchungen von Gauss (Theoria combinat. observ.) hervor, dass $\varphi(\lambda)$ mit wachsendem λ im Allgemeinen abnimmt. Denn man hat dann die Beziehungen:

$\varphi(\lambda)$ abnehmend bei wachsendem λ:

(8)

$$\beta \leqq \frac{2}{3\sqrt{1-W}} \quad \text{für} \quad W \geqq \frac{2}{3}$$

$$\beta \leqq \sqrt{\frac{4}{3}} \text{ d. i. } 1.15470 \quad W = \frac{2}{3}$$

$$\beta \leqq W\sqrt{3} \quad \text{„} \quad W \leqq \frac{2}{3}$$

C. Hat sich ergeben, dass $\varphi(\lambda)$ im Allgemeinen sowohl eine gerade als von $\varphi(0)$ aus abnehmende Function ist d. h. die Eigenschaften der Vertheilungsgesetze zufälliger Fehler zeigt, so kann man eingehender untersuchen, ob $\varphi(\lambda)$ der Form $ce^{-h^2\lambda^2}$ entspricht.

Wir berechnen zunächst im Anschluss an die §§. 2. und 3. wieviel von $n = 1000$ Fehlern zwischen den Grenzen $\mp \mu_\lambda$ und $\mp 2\mu_\lambda$ liegen für die drei Annahmen über $\varphi(\lambda)$.

Annahme I: $\varphi(\lambda) = c \quad \lambda^2 \leqq a^2$.

Folgt aus (7): es liegen zwischen

(9)

$\mp \mu_\lambda$	$0.57735\,n$ Fehler
$\mp 1.73205\,\mu_\lambda$	gerade n Fehler.

Annahme II: $\varphi(\lambda) = c\left(1 - \frac{\lambda^2}{a^2}\right) \quad \lambda^2 \leqq a^2$

Zwischen den Grenzen $\mp \beta\mu_\lambda$ liegen von n Fehlern

$$(10) \qquad n \cdot 2\varkappa c \int_0^{\beta\mu_\lambda} \left(1 - \frac{\lambda^2}{a^2}\right) d\lambda$$

d. i. nach §. 3. (15** und 17**)

$$(11) \qquad 0.67082\beta\left(1 - \frac{\beta^2}{15}\right) n.$$

Für $\beta = 1$ und 2 folgt: es liegen zwischen

$$(12) \qquad \begin{array}{ll} \mp\ \mu_\lambda & 0.62610n \text{ Fehler} \\ \mp\ 2\mu_\lambda & 0.98387n \quad ,, \end{array}$$

Annahme III: $\varphi(\lambda) = ce^{-h^2\lambda^2}$.

Zwischen den Grenzen $\mp\beta\mu_\lambda$ liegen von n Fehlern

$$(13) \qquad n \cdot 2\varkappa c \int_0^{\beta\mu_\lambda} e^{-h^2\lambda^2} d\lambda$$

d. i. nach §. 3. (15† und 17†)

$$(14) \qquad n \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\beta\mu_\lambda} e^{-t^2} dt \text{ d. i. gleich } n \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{0.70711\beta} e^{-t^2} dt$$

und mittelst der in §. 3. verzeichneten Integralwerthe für $\beta = 1$ und 2 folgt damit: es liegen zwischen

$$(15) \qquad \begin{array}{ll} \mp\ \mu_\lambda & 0.68269n \text{ Fehler} \\ \mp\ 2\mu_\lambda & 0.95450n \quad ,, \end{array}$$

Damit erhalten wir das

Tableau über die Vertheilung der λ:

(16)

Von 1000 λ liegen dem abs. Werthe nach zwischen	bei Annahme		
	I	II	III
Null und μ_λ	577	626	683
,, ,, $2\mu_\lambda$	1000	984	954
μ_λ ,, $2\mu_\lambda$	423	358	271

Dagegen liegt die Hälfte der Fehler nach Tableau (19) §. 3.

$$(17)\quad \begin{cases} \text{bei Annahme I zwischen} & \mp 0.86603\,\mu_\lambda \\ \text{„ „ II „} & \mp 0.77658\,\mu_\lambda \\ \text{„ „ III „} & \mp 0.67449\,\mu_\lambda \end{cases}$$

Eine summarische Vergleichung der Vertheilung der λ nach den drei Annahmen ist gewährt durch Berechnung des Verhältnisses von μ_λ und ϑ_λ (wofür wir in der Regel $\mu : \vartheta$ gesetzt haben). Nach Tableau (19) §. 3. ist nämlich für

Annahme	I	II	III
(18) $\mu_\lambda : \vartheta_\lambda =$	1.15470;	1.19257;	1.25331

Für die Annahme III insbesondere setzen wir noch β gleich 0.1 0.2 . . . . 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0 und erhalten:

Von 1000 Fehlern liegen zwischen den Grenzen:

(19)

$\mp 0.1\,\mu_\lambda$	80	Fehler
∓ 0.2	159	„
∓ 0.3	236	„
∓ 0.4	311	„
∓ 0.5	383	„
∓ 0.6	451	„
∓ 0.7	516	„
∓ 0.8	576	„
∓ 0.9	632	„
∓ 1.0	683	„
∓ 1.5	866	„
∓ 2.0	954	„
∓ 2.5	988	„
∓ 3.0	998	„

III. Das Resultat der Untersuchung hat eine unmittelbare Bedeutung, wenn dieses sich auf wahre Fehler ε bezog; in den Formeln des vorhergehenden Abschnitts ist sodann allenthalben für λ das Symbol ε zu substituiren, insbesondere für μ_λ und ϑ_λ resp. μ und ϑ (§. 4.).

Untersuchen wir beispielsweise die fünf wahren Fehler in den Dreiecksabschlüssen des **Beispiel 12.** (S. 185 u. 27, wobei wir davon absehen wollen, dass dieselben nicht vollständig unabhängig von einander sind):

(30) $$-1.368+1.773+1.042-0.813-0.750$$

für welche

(31) $$\mu = \mp 1.21 \qquad \vartheta = \mp 1.15$$

ist, so haben wir:

		Positive Fehler	Negative Fehler
(32)	Anzahl	2	3
	Quadratsumme	4.23	3.09
	Summe val. abs.	2.82	2.93

Nach der Grösse geordnet sind die Fehler

(33) $$-0.750-0.813+1.042-1.368+1.773.$$

Die Hälfte der Fehler liegt innerhalb der Grenzen $\mp 0.86603\,\mu$ d. i. ∓ 1.05.

Innerhalb der Grenzen $\mp \mu$ liegt 0.6 der Anzahl der Fehler.

Ausserhalb der Grenzen $\mp 2\mu$ liegt kein Fehler.

Innerhalb der Grenzen $\mp 1.1547\,\mu$ d. i. ∓ 1.40 liegen 0.8 der Anzahl der Fehler, also mehr als $\frac{2}{3}$.

Im Hinblick auf die geringe Fehleranzahl können wir ihr Vorkommen als übereinstimmend mit dem zufälliger Fehler betrachten. Am nächsten würde das Fehlergesetz I dem Vorkommen der fünf Fehler entsprechen; auch mit Rücksicht auf das Verhältniss $\mu : \vartheta = 1.06$. Jedoch kann man bei nur fünf Fehlern nicht wagen, so specielle Schlüsse ziehen zu wollen.

IV. Bezieht eine Untersuchung sich auf Verbesserungen λ nach der Ausgleichung, so hat man, soweit es die Frage betrifft, ob $\varphi(+\lambda) = \varphi(-\lambda)$ ist, darauf zu achten, dass auch allenthalben die Beobachtungen mit ihrem richtigen Vorzeichen aufgeführt sind, wie es dem Messungsgange entspricht. Messen wir z. B. einen Winkel zwischen einem linksliegenden Object A und einem rechtsliegenden Object B einerseits, dagegen sein Supplement zu 360^0 zwischen B als linksliegendem Objecte und A als rechtsliegendem Objecte andrerseits, so haben wir zunächst zwei verschiedene Grössen gemessen; doch kann man auch

beide Messungen ansehen als Beobachtungen des Winkel AB oder beide als Beobachtungen des Winkels BA, nur ist alsdann der eine Beobachtungswerth nicht von der Form l, sondern von der Form $(360 - l)$ oder kurz $-l$ und die Verbesserung λ bezieht sich auf $-l$ und man muss derselben daher bei der Untersuchung der λ das entgegengesetzte geben, um die Verbesserung des Beobachtungswerthes selbst zu haben.

Zerlegt man die Winkelbeobachtungen in Differenzen zweier Richtungsbeobachtungen, so hat die betreffende Untersuchung überhaupt keinen Sinn mehr, da die beiden Richtungsfehler immer gleichgross und von entgegengesetztem Zeichen sich ergeben, also von selbst $\varphi(+\lambda) = \varphi(-\lambda)$ wird.

Ueberhaupt muss man, wenn in aller Strenge untersucht werden soll, nach Ausgleichung von Satzbeobachtungen auf Winkelfehler zurückgehen, weil die Verbesserungen λ nur dann als den Richtungsfehlern selbst entsprechend angesehen werden dürfen, wenn alle andern Fehler verschwinden oder eliminirt sind, also insbesondere Drehungen des Instruments in der Zwischenzeit zwischen aufeinanderfolgenden Visuren, oder ein Einfluss der Drehungsrichtung der Alhidade u. A. m.

Wenn im Allgemeinen es als Grundsatz für vollständige Untersuchung der plausibelsten Beobachtungsfehler λ angesehen werden muss, nach geschehener Ausgleichung erst auf die Verbesserungen der unmittelbaren Beobachtungen zurückzugehen, so kann man doch in dem Falle, wo die in der Ausgleichung eingeführten Beobachtungswerthe l aus andern Beobachtungen berechnet worden sind und zwar jedes l aus einer andern Gruppe solcher nach demselben Bildungsgesetz (wie in Beisp. 1.), die λ dieser l betrachten als Verbesserungen unmittelbarer Beobachtungen.

V. Die Frage, ob das Resultat der Untersuchung über $\varphi(\lambda)$ auf $\varphi(\varepsilon)$ ausgedehnt werden könne, lässt sich mit einiger Wahrscheinlichkeit nur dann bejahen, wenn das Vorkommen der λ hinlänglich dem zufälliger Fehler entspricht und die Anzahl der überschüssigen Messungen nicht allzu gering ist. Ein Maass zur Beurtheilung

des Unterschiedes der λ und ε geben die Grössen μ_λ und μ, z. B. bei vermittelnden Beobachtungen ist

$$\mu_\lambda^2 = \frac{[\lambda\lambda]}{n} \quad \mu^2 = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n} = \frac{[\lambda\lambda]}{n-m} \tag{20}$$

und daher im Mittel der Unterschied eines wahren und übrigbleibenden Fehlerquadrates:

$$\mu^2 - \mu_\lambda^2 = [\lambda\lambda]\frac{m}{n(n-m)} = \mu^2\frac{m}{n} \tag{21}$$

oder der mittlere Unterschied $(\varepsilon - \lambda)$ gleich

$$\mu\sqrt{\frac{m}{n}} \tag{22}$$

welcher Ausdruck bei bedingten Beobachtungen in

$$\mu\sqrt{\frac{n-r}{n}} \tag{23}$$

übergeht. (Man erkennt aus den Formeln §. 15. I. ohne Mühe, dass der durchschnittliche Werth von $(\varepsilon - \lambda)^2$ in der That $^1/_n$ von $[\varepsilon\varepsilon] - [\lambda\lambda]$ ist.)

Entspricht $\varphi(\lambda)$ keinem zufälligen Fehlergesetz, so wird in der Regel $\varphi(\varepsilon)$ noch weniger die Eigenschaften eines solchen besitzen, da alsdann die λ im Allgemeinen nur einen Theil des regelmässigen Fehlers enthalten. Aber auch wenn $\varphi(\lambda)$ die Eigenschaften zufälliger Fehlergesetze hat, so wird, wie wir in §. 29. gesehen haben, doch Aufmerksamkeit darauf zu wenden sein, ob etwa Ursachen regelmässiger Fehler vorhanden sein könnten, welche durch die Ausgleichung nicht angedeutet werden.

Beispiel 12. (Fortsetzung zu §. 23. S. 192.) Die λ, 18 an der Zahl, sind nach der Grösse geordnet:

$$\begin{array}{l} -0.021 \; -0.053 \; -0.065 \; -0.164 \; -0.230 \\ +0.070 \; +0.138 \; +0.163 \; +0.193 \; +0.213 \\ -0.233 \; -0.339 \; -0.407 \; -0.502 \\ +0.219 \; +0.256 \; +0.282 \; +0.481 \end{array} \tag{34}$$

Es lehrt hier schon der Anblick, dass man die Vertheilung im Positiven und Negativen näherungsweise als gleich betrachten kann. Insbesondere ist die Anzahl der positiven λ gleich der Anzahl der negativen; ferner ist die Quadratsumme der ersteren 0.5465, die der letzteren 0.6836.

Dass endlich die Summe aller λ gerade Null ist, ist eine Folge der Form der Aufgabe; man entnimmt aus den Correlatengleichungen (17) sofort die Bemerkung, dass sogar für jede Station die Summe der Richtungsverbesserungen Null werden muss.

Ferner ergiebt sich

$$\mu_\lambda = \mp \sqrt{\frac{1.230}{18}} = \mp 0''.261 \tag{35}$$

13 der λ (6 negative, 7 positive) oder 0.7 der Gesammtanzahl derselben sind mithin $< \mu_\lambda$. Grösser als $2\mu_\lambda$ ist keines der λ. Berücksichtigt man noch die Relation (23) zwischen μ_λ und ϑ_λ, so kann man die Vertheilung der λ als einem zufälligen Fehlergesetze hinreichend entsprechend betrachten.

Die mittlere Abweichung zwischen ε und λ findet sich zu

$$\mp 0.419 \sqrt{\frac{18-7}{18}} \text{ d. i. } \mp 0''.33,$$

es ist daher aus den λ auf die Vertheilung der ε wegen zu geringer Controllenanzahl kein sicherer Schluss zu ziehen; immerhin scheint das Nichtvorhandensein grösserer regelmässiger Fehler erwiesen, zumal die Entstehung der Bedingungsgleichung nicht befürchten lässt, dass sie von jenen gerade erfüllt worden wären.

VI. Man hat den Umstand, dass oftmals bei der Ausgleichung gleichgenauer Beobachtungen nach der Methode der kl. Qu. $[\lambda]$ nicht nothwendig Null wird, als einen Mangel derselben hingestellt (Lamont, meteorol. Wochenberichte Nr. 203—210. 1869), während es uns bei der Untersuchung der Fehler nicht gerade als günstiger Umstand erschien, wenn $[\lambda]$ nothwendig Null war, da wir alsdann $[\lambda]$ nicht als Prüfung für die Erfüllung der Bedingung $(\varphi(+\lambda) = \varphi(-\lambda)$ benutzen konnten. Wenn nun auch in der That die Erfüllung der Gleichung $[\lambda] = 0$ der Natur der zufälligen Beobachtungsfehler entspricht, so folgt daraus nicht, dass es zweckmässig sei, $[\lambda] = 0$ als Princip der Ausgleichung an Stelle von „$[\lambda\lambda]$ ein Minimum“ zu setzen. Denn einestheils reicht jene Bedingung (in der Regel) nicht aus zur Ausgleichung und müssen dann noch andere zugezogen werden; anderntheils

giebt nur die Methode der kl. Qu. grösste Gewichte der Resultate, jede andere Methode aber kleinere Gewichte. Dies schliesst nun zwar nicht aus, dass im einzelnen Falle es doch zweckmässiger ist, die Methode der kl. Qu. zu verlassen, jedoch erfordert die Wahl einer andern Methode immer Ueberlegung und also Zeit, sodass es zweifelhaft bleiben kann, ob schliesslich auch nur an Zeit gewonnen worden ist, ganz abgesehen vom Verlust an Schärfe in den Endwerthen.

VII. In manchen Fällen hat eine Untersuchung der λ zunächst nur den Zweck, zu entscheiden, ob die Gewichte der in die Ausgleichung aufgenommenen Beobachtungsgrössen richtig angenommen sind, oder nicht. Selbstredend ist Voraussetzung, dass die λ nur von zufälligen Fehlern herrühren und die Untersuchung besteht darin, nachzusehen, ob die durchschnittlichen Werthe der λ^2 im umgekehrten Verhältnisse der angenommenen Gewichte stehen. Bei erheblichen Abweichungen ist eine neue Ausgleichung vorzunehmen mit Gewichten, die dem umgekehrten Verhältnisse jener Durchschnittsfehlerquadrate genügend entsprechen.

§. 31.

Ermittlung regelmässiger Fehlerursachen.

I. Zeigt die Untersuchung der Fehler (λ oder ε), dass sie eines zufälligen Vorkommens entbehren, so gilt es, wenn möglich, die regelmässige Fehlerursache aufzudecken. Dies kann nur durch Probiren geschehen. Oft führt es zum Ziele, die Beobachtungen mit grossen positiven Fehlern und die mit grossen negativen Fehlern zu vergleichen nach den etwaigen bei denselben vorgekommenen verschiedenen Umständen. Vielleicht findet sich alsdann, dass ein solcher Umstand, da er bisher ausser Acht geblieben, Ursache eines regelmässigen Fehlers gewesen ist. Manchmal genügt es, die Beobachtungen nur nach der Zeit zu gruppiren, oder nach irgend welchen theilweise gemeinsamen Merkmalen, wodurch sie in Gruppen zerfallen.

II. In vielen Fällen ist es möglich, den aus der Ausgleichung hervorgehenden mittlern Beobachtungsfehler zu vergleichen mit Bestimmungen desselben auf anderem Wege. Ist keine genügende Uebereinstimmung, so ist dies ein Zeichen, dass im einen oder andern Falle unbeachtete und also in der Regel regelmässige Fehlerursachen eingewirkt haben. Einen Fall, wo auf diese Art die Untersuchung geführt werden kann, haben wir bereits §. 8. kennen gelernt.

Um ein weiteres Beispiel zu geben, betrachten wir eine Triangulation, bei welcher zunächst jede Station nach Richtungen ausgeglichen sei. Ergiebt sich hier im Mittel für alle Stationsausgleichungen ein mittlerer zu befürchtender Fehler μ' einer Richtungsbeobachtung, so muss der aus der Netzausgleichung folgende mittlere Fehler μ'' einer Richtungsbeobachtung mit μ' genügend übereinstimmen. Findet sich $\mu'' > \mu'$, so kann dies seinen Grund haben in regelmässigen lateralen Refractionen, in mangelhafter Elimination der Theilungsfehler, in mangelhafter Centrirung der Winkelmessinstrumente und der Signale (und falls diese körperlich sind und daher Licht und Schatten zeigen: in dem Fehler des Auges, die hellen Theile grösser als die dunkeln zu sehen) u. A. m.*)

Findet sich $\mu' > \mu''$, so kann dies seinen Grund darin haben, dass die Verbesserungen der Stationsausgleichungen instrumentale Fehler enthalten, die jedoch in den Endergebnissen für jede Station eliminirt sind. Wie z. B., wenn die zusammengehörigen Beobachtungsreihen beider Instrumentlagen in den Stationsausgleichungen einzeln aufgeführt werden — oder, wenn der Theilkreis grosse periodische Theilungsfehler hat und diese zwar durch successive Wiederholung der Messungen an verschiedenen Kreisstellen eliminirt, aber zu den Stationsausgleichungen doch die Einzelreihen verwendet werden.

*) Gauss fand gelegentlich seiner Vermessungen in Hannover, dass er einen constanten Visurfehler beging, als er ein Heliotropenlicht beobachtete, welches ihm aus der Laterne eines Thurmes zuging und eine zum Bilde des Thurmes excentrische Lage inne hatte. (Briefwechsel mit Schumacher.)

III. Die Untersuchung der Verbesserungen λ führt, wie wir gesehen haben, nur in manchen Fällen zur genäherten Kenntniss des Vertheilungsgesetzes der wahren Fehler, sowie zur Andeutung regelmässiger Fehlerquellen. Ist man nun in Zweifel, ob man die berechneten mittleren zu befürchtenden Fehler als mittlere Abweichungen von der Wahrheit betrachten dürfe, so bleibt nur noch das Mittel, die Messungen zu wiederholen, aber mit möglichster Veränderung aller begleitenden Umstände, also auch, soweit persönliche Fehler zu fürchten sind: Veränderung der Beobachter.

Dies Verfahren ist überhaupt geeignet, Resultate zu erzielen, welche sich der Wahrheit thunlichst nähern, und es wird insbesondere in der praktischen Astronomie, sowohl bei geographischen Ortsbestimmungen als auch bei Orts-, Helligkeits- und Grössenbestimmungen der Gestirne angewandt.

Beispiel 19. Gelegentlich einer trigonometrischen Vermessung fand Verfasser für einen Winkel von beiläufig 80° folgende Werthe der Secunden bei 6 verschiedenen Stellungen des Kreises zu den Winkelschenkeln:

(1)

Runder Werth der Ablesung für's linke Object:						
0°	30°	60°	90°	120°	150°	
45.90	44.26	44.07	46.38	51.02	51.44	
47.34	43.97	42.82	48.96	47.36	48.12	
47.18		46.93	43.47	47.88	48.16	
43.39		44.38		48.51	48.97	
47.34				48.17		
49.25						
43.55						
46.28	44.12	44.55	46.27	48.59	49.17	Mittel aus
7	2	4	3	5	4	Messungen.

Bildet man für jede Verticalreihe die Abweichungen vom Mittel derselben und daraus das Quadrat des mittleren Fehlers einer Beobachtung, so erhält man:

$$\begin{aligned} \mu^2_0 &= \frac{27.83}{7-1} & \mu^2_{30} &= \frac{0.04}{2-1} \\ \mu^2_{60} &= \frac{8.92}{4-1} & \mu^2_{90} &= \frac{15.09}{3-1} \\ \mu^2_{120} &= \frac{8.10}{5-1} & \mu^2_{150} &= \frac{7.32}{4-1} \end{aligned} \tag{2}$$

Diese Fehlerquadrate sind Bestimmungen ein und derselben Grösse, nämlich des mittlern Fehlerquadrates einer Winkelmessung frei vom periodischen Theilungsfehler. Nach §. 15. sind die Gewichte dieser Bestimmungen die Nenner der Quotienten (2), wenn für die Gewichtseinheit als mittleres Fehlerquadrat $2\mu^4$ angenommen wird. Im Mittel ist

$$\mu^2 = \frac{6\mu^2_0 + \mu^2_{30} + 3\mu^2_{60} + 2\mu^2_{90} + 4\mu^2_{120} + 3\mu^2_{150}}{6 \quad +1 \quad +3 \quad +2 \quad +4 \quad +3}$$

daher

$$\mu^2 = \frac{67.30}{19} = 3.542 \text{ mit Gewicht } 19 \tag{3}$$

also auch

$$\mu^2 = 3.542 \mp 1.149. \tag{4}$$

Nehmen wir aus allen Beobachtungen einfach das Mittel gleich 46.75 oder was dasselbe ist, aus den 6 Einzelmitteln das Mittel mit Rücksicht auf ihre Gewichte 7 . . . 4, so wird in den Verbesserungen

$$+0.47 \quad +2.63 \quad +2.20 \quad +0.48 \quad -1.84 \quad -2.42 \tag{5}$$

der Einzelmittel der periodische Theilungsfehler enthalten sein. Zu den Verbesserungen gehören die Gewichte

$$7 \qquad 2 \qquad 4 \qquad 3 \qquad 5 \qquad 4$$

und es wird damit das Quadrat des mittlern Beobachtungsfehlers gleich

$$\mu'^2 = \frac{75.78}{6-1} = 15.157 \mp 9.58. \tag{6}$$

Wären μ^2 und μ'^2 aus ganz verschiedenen Beobachtungen bestimmt, so würde ihre mittlere Abweichung von einander

$$\mp \sqrt{(1.15)^2 + (9.58)^2} \text{ d. i. } \mp 9.65 \tag{7}$$

betragen dürfen; da sie aber aus ganz denselben Beobach-

tungswerthen nur durch verschiedene Combinationen entstanden sind, so sollte ihr mittlerer Unterschied, wie sich ohne Weiteres sagen lässt, viel kleiner als 9.65 sein. Der factische Unterschied ist aber erheblich grösser, was darin seinen Grund hat, dass bei der 1. Combination der Einfluss einer Fehlerquelle, der periodische Theilungsfehler, vermieden wurde.

Das einfache Mittel der Mittelwerthe (1) ist wegen der regelmässigen Vertheilung der 6 Gruppen über die Kreisperipherie frei vom periodischen Theilungsfehler. Man hat dafür 46″.50 mit einem mittlern Fehler

$$\frac{\mu}{6}\sqrt{\frac{1}{7}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}};$$

es ist daher, weil man für μ den Werth (4) einzuführen hat, das Endresultat

(8) $$46''.50 \mp 0''.41.$$

Dieser Werth ist vom periodischen Theilungsfehler auch aus dem Grunde frei, weil der Winkel nahe 90° ist. Verbindet man nämlich solche Messungsergebnisse zu einem Mittel, die sich auf aneinanderstossende Kreisbögen beziehen, die zusammen (bei Anwendung zweier diametraler Nonien) nahezu gleich 180° sind, so wird dieses frei vom periodischen Theilungsfehler. In der That stimmen die einfachen Mittel der Ergebnisse für 0° und 90°, 30° und 120°, 60° und 150° Tabl. (1), nämlich

(9) 46.28 46.36 46.86

mit den mittlern Fehlern

(10) $$\frac{\mu}{2}\sqrt{\frac{1}{7}+\frac{1}{3}} \quad \frac{\mu}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}} \quad \frac{\mu}{2}\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}$$

so überein, als es ihre mittlern Fehler erwarten lassen, wenn man für μ den vom periodischen Theilungsfehler freien Werth (4) einführt.

Hätten wir ohne Weiteres aus allen 25 Ergebnissen das Mittel 46.75 genommen, so hätten wir die Verbesserungen λ erhalten wie folgt:

	+ 0.85	+ 2.49	+ 2.68	+ 0.37	— 4.27	— 4.69
	— 0.59	+ 2.78	+ 3.93	— 2.21	— 0.61	— 1.37
	— 0.43		— 0.18	+ 3.28	— 1.13	— 1.41
(11)	+ 3.36		+ 2.37		— 1.76	— 2.22
	— 0.59				— 1.42	
	— 2.50					
	+ 3.20					

jedoch wahrscheinlich in andrer Anordnung, die nicht wie diese hier sofort einen regelmässigen Fehler anzeigt. Aber das Vorhandensein eines solchen würde uns nicht entgangen sein, weil, trotzdem $[\lambda]$ nothwendig gleich Null (25.31—25.38) ist, doch 10 positive und 15 negative Fehler vorhanden sind. Insbesondere hat man für

$$(12) \qquad \mu_\lambda = \mp \sqrt{\frac{143.15}{25}} = \mp 2''.39$$

zwischen $\mp 1.155\,\mu_\lambda$ 5 pos. 13 neg. F. d. i. 0.72 d. Gesammtzahl

$\mp \mu_\lambda$ 3 „ 12 „ „ „ 0.60 „ „

$\mp 0.866\,\mu_\lambda$ 2 „ 10 „ „ „ 0.48 „ „

Grösser als $2\mu_\lambda$ ist keines der λ.

Hiernach genügt im Allgemeinen die Vertheilung zwar noch der Annahme I., $\varphi(\lambda) = c$ jedoch tritt ganz entschieden hervor, dass $\varphi(\lambda)$ nicht gerade ist.

VI. Abschnitt.

§. 32.

Anwendung der Methode der kl. Qu. auf näherungsweise Darstellung gegebner Functionen, sowie zur Berechnung von Interpolationsformeln für eine Reihe gegebner Functionswerthe, insbesondere wenn letztere durch Beobachtung ermittelt sind.

I. Näherungsweise Darstellung von Functionen. Man kann die Methode der kl. Qu. anwenden, um eine Function innerhalb gewisser Grenzen der Veränderlichen durch eine andere Function derselben Veränderlichen darzustellen, so-

dass die Summe der Quadrate der Abweichungen ein Minimum wird.

Beispiel 20. Es soll die $\sqrt{1+x}$, wo x zwischen -1 und $+1$ gelegen sei, dargestellt werden durch $1+\alpha x$, sodass die Summe der Quadrate der Differenzen $\sqrt{1+x} - (1+\alpha x)$ ein Minimum werde. Bilden wir die Fehlergleichung

$$\lambda = -\sqrt{1+x} + (1+\alpha x) \tag{1}$$

oder

$$\lambda = -(\sqrt{1+x} - 1) + \alpha x \tag{2}$$

so ist dieselbe der Repräsentant aller Fehlergleichungen, die entstehen, wenn man x alle Werthe zwischen -1 und $+1$ annehmen lässt. Erfolgt die Aenderung von x sprungweise im Intervall dx, so kommt den Fehlergleichungen nothwendig gleiches Gewicht zu, doch hat die Wahl der Gewichtseinheit auf's Endresultat keinen Einfluss. Nehmen wir dx als Gewicht und bilden die Normalgleichung für die Unbekannte α, so ergiebt sich

$$\alpha \left[x x dx \right]_{-1}^{+1} = \left[(x\sqrt{1+x} - x)\, dx \right]_{-1}^{+1}$$

oder

$$\alpha = \frac{\int_{-1}^{+1} (x\sqrt{1+x} - x)\, dx}{\int_{-1}^{+1} x^2 dx} \tag{3}$$

Berücksichtigt man, dass

$$\int_{-1}^{+1} x\sqrt{1+x}\, dx = 2\int_{0}^{\sqrt{2}} y^2(y^2-1)\, dy = \frac{4\sqrt{2}}{15}$$

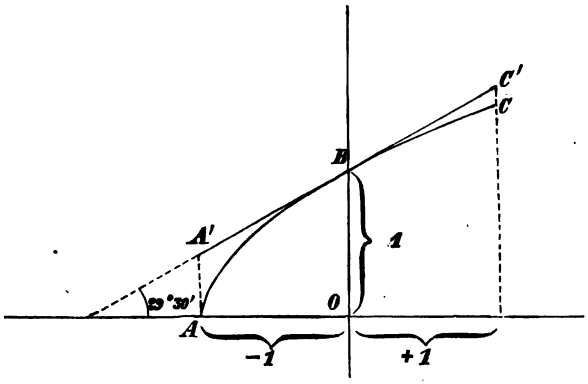
so folgt

$$\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{5} = 0.5657. \tag{4}$$

Die geometrische Bedeutung ist diese (s. Figur):

Es ist gegeben eine Parabel mit dem Parameter 1, bezogen auf rechtwinklige Coordinatenaxen parallel und

senkrecht der Hauptaxe mit dem Ursprunge O im Abstand 1 vom Scheitel. Die Ordinatenaxe schneidet die Parabel in B.



Legt man durch diesen Punkt eine Gerade $A'C'$, welche mit der Hauptaxe den Winkel 29° 30′, der zu arctan α gehört, einschliesst, so ist die Summe der Quadrate der Differenzen der Ordinaten gleicher Abscissen von Parabelbogen und Gerade für alle Werthe der Abscissen zwischen — 1 und + 1 ein Minimum.

Es bedarf kaum der Erinnerung daran, dass die Anwendung der M. d. kl. Qu. auf den vorliegenden Fall völlig willkürlich ist und ihr nicht im Mindesten ein tieferer Sinn innewohnt, wie bei der Ausgleichung von Beobachtungen. Man bedient sich dieser Methode aber deshalb, weil sie in der Regel die bequemste Rechnung giebt, um die einfachere Function der gegebenen Function möglichst anzuschliessen. Und sie hat hier ganz dieselbe Bedeutung, wie bei Anwendung auf die Ausgleichung von Beobachtungen, wo das Fehlergesetz keine gerade Function des Fehlers ist.

II. Interpolationsformeln. Ist eine Function einer Variablen nur durch eine Reihe discreter Werthe bekannt, welche durch Beobachtungen erhalten worden sind, so kann man bekanntlich den Theil der Function, über den sich die Beobachtungen erstrecken, näherungsweise durch eine Interpolationsformel darstellen.

Wir erinnern zunächst an die Lagrange'sche Interpolationsformel, welche für z. B. drei Beobachtungs-

werthe $l_1\ l_2\ l_3$, die zu den Werthen $x_1\ x_2\ x_3$ der Variablen gehören, lautet:

$$(1)\ F(x)=l_1\frac{(x-x_2)\,(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+l_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+l_3\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Für x gleich $x_1\ x_2\ x_3$ geht F resp. in $l_1\ l_2\ l_3$ über. Entwickelt man nach Potenzen von x, so ergiebt sich

$$(2)\qquad F(x)=\alpha+\beta x+\gamma x^2$$

worin $\alpha\ \beta\ \gamma$ drei von den l und den drei besondern Werthen x abhängige Constanten sind.

Hat man nicht drei, sondern m Beobachtungen für m verschiedene x, so erhöht sich die Anzahl der Constanten ebenfalls auf m. Erwägt man nun, dass die l beobachtet sind, also von den genauen Functionswerthen abweichen, so ist es erlaubt, soviele der Constanten wegzulassen (und die übrigen nach der Methode der kl. Qu. zu bestimmen), dass die für die l nothwendig werdenden Verbesserungen den Betrag des mittlern zu befürchtenden Beobachtungsfehlers in l nicht überschreiten, welcher letztere also im Voraus mindestens annähernd bekannt sein muss.

Das praktisch einzuschlagende Verfahren ist entweder: Man bestimmt zunächst sämmtliche Constanten, vernachlässigt aber alsdann die sehr wenig einflussreichen und bestimmt nun die übrigen nach der Methode der kl. Qu.

Oder: Man nimmt zunächst nur eine ausgewählte Anzahl Constanten, von denen man den grössten Einfluss erwartet (vielleicht auf Grund vorläufigen Probirens) und bestimmt dieselben nach der Methode der kl. Qu. und berechnet zugleich $[\lambda\lambda]$ aus $[ll]$ nach Formel (9) §. 14. und daraus die mittlere Abweichung μ. Erscheint dieselbe noch zu gross, so fügt man der Formel ein weiteres Glied zu: eine Constante multiplicirt in eine bisher noch nicht eingeführte Potenz der Variablen. Die neue Ausgleichung enthält die vorhergehende ganz in sich, sodass durch diese kein Arbeitsverlust entstanden ist. Auch der Formel für $[\lambda\lambda]$ fügt sich nur ein neuer Subtrahend bei.

Dieses Zusetzen neuer Glieder zu $F(x)$ wird erneuert, bis endlich die mittlere Abweichung μ sich klein genug ergiebt.

Um einer in der praktischen Astronomie häufigen Anwendung zu gedenken, erwähnen wir, dass der tägliche Gang der Chronometer aus einzelnen beobachteten Werthen zu interpolatorischen Zwecken gewöhnlich ausreichend dargestellt wird durch eine Formel $\alpha + \beta t + \gamma t^2$, worin t die von irgend einer Epoche ab gezählten Zeiträume in Tagen bedeutet. Im Allgemeinen erhält man die bequemste Ausgleichungsrechnung, wenn man t von der Mitte des Zeitabschnitts aus, über den sich die Beobachtungen erstrecken, rückwärts (negativ) und vorwärts (positiv) zählt.

III. Hat man es mit Beobachtungswerthen l einer Erscheinung zu thun, die periodischer Natur ist, so wendet man als Interpolationsformel eine periodische Reihe an, welche nach Sinus und Cosinus des einfachen, zweifachen, dreifachen . . in Bruchtheilen der Periode ausgedrückten und mit 360^0 multiplicirten Werthes der Veränderlichen fortschreitet.

Giebt man in dieser Reihe der Veränderlichen einen Werth, der um ξ über die Periode hinausreicht, so ergiebt sich ein Functionswerth, der gleich demjenigen ist, der zu dem Werthe ξ der Veränderlichen gehört.

Beispiel 21. Ern. Quetelet giebt in einem Mém. de la Température de l'Air à Bruxelles (1867) an, dass im Mittel aus einer dreissigjährigen Reihe von Beobachtungen die tägliche Amplitude der Temperatur der Luft (d. i. Maximaltemperatur — Minimaltemperatur) war:

(1)

Grade	4.66	5.42	6.77	8.59	9.83	10.09
im	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni
Grade	9.71	9.14	8.16	6.55	5.10	4.41
im	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.

wobei jede Zahl das arithmetische Mittel der Amplituden aller Tage des betr. Monats ist.

Als Periode ist das Jahr zu nehmen; es wird durch die Monate sehr nahe in 12 gleiche Theile getheilt.

Die Veränderliche x ist die Anzahl der Monate oder

Jahreszwölftel von Mitte Januar ab und es ist daher ihr Werth in Bruchtheilen der Periode für Jan. Febr. März u. s. f. $\frac{0}{12}\ \frac{1}{12}\ \frac{2}{12}\ \ldots$ und mit 360^0 multiplicirt $0^0\ 30^0\ 60^0\ \ldots$, allgemein: $30x$.

Wir setzen nun

$$(2)\quad \text{Amplitude} = \alpha + \beta_1 \sin 30x + \beta_2 \cos 30x + \gamma_1 \sin 60x + \gamma_2 \cos 60x + \delta_1 \sin 90x + \delta_2 \cos 90x + \ldots$$

und insbesondere

$$4.66 = \alpha \quad . \quad + \beta_2 \quad . \quad + \gamma_2 \quad . \quad + \delta_2 \quad \ldots$$
$$5.42 = \alpha + \beta_1 \sin 30^0 + \beta_2 \cos 30^0 + \gamma_1 \sin 60^0 + \gamma_2 \cos 60^0 + \delta_1 \sin 90^0 + \delta_2 \cos 180^0 \ldots$$
$$6.77 = \alpha + \beta_1 \sin 60^0 + \beta_2 \cos 60^0 + \gamma_1 \sin 120^0 + \gamma_2 \cos 120^0 + \delta_1 \sin 180^0 + \delta_2 \cos 180^0 \ldots$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

Die Anzahl der zu bestimmenden Constanten $\alpha\ \beta_1\ \beta_2 \ldots$ muss gleich 12 genommen werden, wenn alle 12 Beobachtungswerthe genau dargestellt werden sollen. Wir begnügen uns aber, einstweilen nur drei zu nehmen, $\alpha\ \beta_1\ \beta_2$, und haben die Fehlergleichungen:

$$(3)\quad \begin{aligned}
\lambda_1 &= -\ 4.66 + \alpha \quad . \quad + 1.0000\beta_2 \\
\lambda_2 &= -\ 5.42 + \alpha + 0.5000\beta_1 + 0.8660\beta_2 \\
\lambda_3 &= -\ 6.77 + \alpha + 0.8660\beta_1 + 0.5000\beta_2 \\
\lambda_4 &= -\ 8.59 + \alpha + 1.0000\beta_1 \quad . \\
\lambda_5 &= -\ 9.83 + \alpha + 0.8660\beta_1 - 0.5000\beta_2 \\
\lambda_6 &= -\ 10.09 + \alpha + 0.5000\beta_1 - 0.8660\beta_2 \\
\lambda_7 &= -\ 9.71 + \alpha \quad . \quad - 1.0000\beta_2 \\
\lambda_8 &= -\ 9.14 + \alpha - 0.5000\beta_1 - 0.8660\beta_2 \\
\lambda_9 &= -\ 8.16 + \alpha - 0.8660\beta_1 - 0.5000\beta_2 \\
\lambda_{10} &= -\ 6.55 + \alpha - 1.0000\beta_1 \quad . \\
\lambda_{11} &= -\ 5.10 + \alpha - 0.8660\beta_1 + 0.5000\beta_2 \\
\lambda_{12} &= -\ 4.41 + \alpha - 0.5000\beta_1 + 0.8660\beta_2
\end{aligned}$$

woraus die Normalgleichungen folgen

$$12\alpha \quad . \quad . = 88.43$$

(4) $$. \; 6\beta_1 \quad . = + 5.9124$$

$$. \quad . \; 6\beta_2 = - 16.2504 \text{ wonach}$$

(5) $\alpha = + 7.36917$; $\beta_1 = + 0.9854$; $\beta_2 = - 2.7084$.

Da nun $[ll] = 701.9199$ ist, so hat man

$$[\lambda\lambda] = 701.9199 - (7.369170 \times 88.43 + 0.9854 \times 5.9124 + 2.7084 \times 16.2504) \text{ oder}$$

(6) $[\lambda\lambda] = 701.9199 - (651.6554 + 5.8261 + 44.0126) = 0.4258$

und daher die mittlere Abweichung

(7) $$\mu = \sqrt{\frac{0.4258}{12-3}} = \mp 0^0.22.$$

Nach Quetelet sind die Angaben der Amplituden mit einem wahrscheinlichen Fehler behaftet, der für die verschiedenen Monate zwischen 0.18 und 0.36 liegt, was einem mittlern Fehler von 0.24 bis 0.54 entspricht (wenn man das Fehlergesetz III. als geltend annimmt, was Qu. vermuthlich bei Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers aus dem mittlern oder durchschnittlichen Fehler gethan hat).

Obgleich sonach schon hinreichende Uebereinstimmung wäre, so wollen wir uns doch nicht damit begnügen und daher den Fehlergleichungen (3) noch je zwei Glieder beifügen, die den Constanten γ_1 und γ_2 entsprechen. Wir erhalten die Zusatzglieder

(3*)

.	$+ 1.0000\gamma_2$	zur	1.	Gl. (3)
$+ 0.8660\gamma_1$	$+ 0.5000\gamma_2$	„	2.	„
$+ 0.8660\gamma_1$	$- 0.5000\gamma_2$	„	3.	„
.	$- 1.0000\gamma_2$	„	4.	„
$- 0.8660\gamma_1$	$- 0.5000\gamma_2$	„	5.	„
$- 0.8660\gamma_1$	$+ 0.5000\gamma_2$	„	6.	„
.	$+ 1.0000\gamma_2$	„	7.	„
$+ 0.8660\gamma_1$	$+ 0.5000\gamma_2$	„	8.	„
$+ 0.8660\gamma_1$	$- 0.5000\gamma_2$	„	9.	„
.	$- 1.0000\gamma_2$	„	10.	„
$- 0.8660\gamma_1$	$- 0.5000\gamma_2$	„	11.	„
$- 0.8660\gamma_1$	$+ 0.5000\gamma_2$	„	12.	„

womit (4) übergeht in

$$
\begin{array}{rrrrrr}
12\alpha & . & . & . & . & = +\ 88.43 \\
. & 6\beta_1 & . & . & . & = +\ 5.9124 \\
. & . & 6\beta_2 & . & . & = -\ 16.2504 \\
. & . & . & 6\gamma_1 & . & = +\ 0.0600 \\
. & . & . & . & 6\gamma_2 & = -\ 1.1700
\end{array} \tag{4*}
$$

$\alpha\ \beta_1\ \beta_2$ behalten die Werthe (5) und ferner wird

$$\gamma_1 = +\ 0.0100 \quad \gamma_2 = -\ 0.1950 \tag{5*}$$

sowie

$$[\lambda\lambda] = 0.4258 - (0.0006 + 0.2282) = 0.1970 \tag{6*}$$

und

$$\mu = \sqrt{\frac{0.1970}{12-5}} = \mp\ 0^0.17. \tag{7*}$$

Auch mit dieser Uebereinstimmung sind wir noch nicht zufrieden, und nehmen daher die Glieder mit δ_1 und δ_2 in der Formel (2) noch herbei. Es sind dann zuzufügen zu (3) und (3*) die Glieder

$$
\begin{array}{rrr|c|c}
. & \delta_2 & \text{für } \lambda_1 & \lambda_5 & \lambda_9 \\
\delta_1 & . & ,, \lambda_2 & \lambda_6 & \lambda_{10} \\
. & -\delta_2 & ,, \lambda_3 & \lambda_7 & \lambda_{11} \\
-\delta_1 & . & ,, \lambda_4 & \lambda_8 & \lambda_{12}
\end{array} \tag{3†}
$$

womit man die zwei neuen Normalgleichungen zu (4) und (4*) erhält:

$$
\begin{array}{rrr}
6\delta_1 & . & = -\ 0.08 \\
. & 6\delta_2 & = +\ 1.07
\end{array} \tag{4†}
$$

und es wird

$$\delta_1 = -\ 0.0133 \quad \delta_2 = +\ 0.1783 \tag{5†}$$

$$[\lambda\lambda] = 0.1970 - (0.0011 + 0.1908) = 0.0051 \tag{6†}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{0.0051}{12-7}} = \mp\ 0^0.03. \tag{7†}$$

Diese Uebereinstimmung genügt und es wäre überflüssig, die andern fünf Constanten, welche zu vollständiger Darstellung der Beobachtungen nothwendig würden, mitzunehmen. Im Ganzen haben wir nach (2) nun

$$\text{Amplitude} = +7.369 + 0.9854\sin 30x - 2.7084\cos 30x + 0.0100\sin 60x - 0.1950\cos 60x - 0.0133\sin 90x + 0.1783\cos 90x \quad (8)$$

worin x die von Mitte Januar ab verflossene Anzahl Monate ist. Für die interpolatorische Anwendung der Formel (8) ist es bequem die Glieder mit Sinus und Cosinus desselben Vielfachen von x zu vereinigen.

Man hat aber allgemein

$$a_1 \sin px + a_2 \cos px = a \sin(px + \nu) \quad (9)$$

indem man linker Hand setzt:

$$a_1 = a\cos\nu \qquad a_2 = a\sin\nu$$

woraus folgt

$$\tan\nu = \frac{a_2}{a_1} \quad (10)$$

$$a = a_1 \sec\nu = a_2 \csc\nu = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Der Quadrant, in welchem ν liegt, ergiebt sich aus den Vorzeichen von a_2 und a_1 in bekannter Weise.

Dies auf (8) angewendet, ergiebt

$$\text{Amplitude} = +7.369 + 2.882\sin(30x - 70^0.0) + 0.195\sin(60x - 87^0.1) + 0.179\sin(90x + 94^0.3). \quad (11)$$

Will man die Anzahl der Monate nicht von Mitte Januar, sondern von Anfang Januar ab zählen, so muss man für x in die Formel einführen $y - \frac{1}{2}$, worin y vom Jahresanfang gerechnet wird. Man erhält damit

$$\text{Amplitude} = +7.369 + 2.882\sin(30y - 85^0.0) + 0.195\sin(60y - 117^0.1) + 0.179\sin(90y + 49^0.3). \quad (12)$$

IV. Die einfache Form, welche die Normalgleichungen im vorhergehenden Beispiel annahmen, wird immer dadurch erzielt, dass man die Functionswerthe für solche Werthe der Veränderlichen beobachtet, welche die Periode in eine, übrigens beliebige, Anzahl gleicher Intervalle theilen. Alsdann werden die nichtquadratischen Summencoefficienten Null, die quadratischen aber lassen sich nach Summenformeln bequem berechnen. Die ersteren haben nämlich eine der Formen

$$
\begin{array}{ll}
A & [\sin\beta(q_0+iq)] \quad i=0,1,2\ldots(n-1) \\
B & [\cos\beta(q_0+iq)] \\
C & [\sin\alpha(q_0+iq)\sin\beta(q_0+iq)] \\
D & [\sin\alpha(q_0+iq)\cos\beta(q_0+iq)] \\
D^* & [\sin\alpha(q_0+iq)\cos\alpha(q_0+iq)] \\
E & [\cos\alpha(q_0+iq)\cos\beta(q_0+iq)]
\end{array}
\Bigg\} \alpha \gtrless \beta
$$

die letzteren aber eine der Formen

$$
\begin{array}{ll}
F & [\sin^2\beta(q_0+iq)] \\
G & [\cos^2\beta(q_0+iq)]
\end{array}
$$

worin bedeuten n die Anzahl der Intervalle

q den Winkelwerth $\frac{360}{n}$, entsprechend dem Intervalle der Veränderlichen,

q_0 den dem Anfangswerthe der Veränderlichen entsprechenden Winkelwerth (der in der Regel Null angenommen wird),

α und β ganze Zahlen:

$$(3) \qquad 0<\alpha<\frac{n}{2} \quad 0<\beta\leqq\frac{n}{2}.$$

Bekanntlich verschwinden aber die Summen $A\ldots E$ in allen Fällen, wo den Bedingungen (3) genügt wird. F und G aber haben die Werthe $\frac{n}{2}$ ausgenommen für $\beta=\frac{n}{2}$, in welchem Falle F den Werth $\frac{n}{2}(1-\cos nq_0)$ und G den Werth $\frac{n}{2}(1+\cos nq_0)$ erhält.

Zum Beweise der Formeln betrachte man ein reguläres n-Eck sowie die zugehörigen Sternpolygone. Durch Projection beweist man leicht A und B und daraus folgen weiter $C\ldots G$ durch Zerlegung der Producte in Summen.

Beispiel 22. Verfasser erhielt in den Jahren 1869 und 1870 auf der Hamburger Sternwarte eine grössere Anzahl Angaben für die Neigung der ca. 90 Centimeter langen horizontalen Axe des Passageninstruments im Meridian. Es fand sich, dass die Neigung mit wechselnder Jahreszeit und Temperatur Aenderungen unterlag und um dieselben schärfer als durch blosse Anschauung zu ermitteln, wurden aus den an verschiedenen Tagen beobachteten Neigungen eines jeden

halben Monats über ein volles Jahr hinweg Mittelwerthe gebildet und dieselben durch eine Interpolationsformel dargestellt.

Mittelwerthe:				Neigung (Erhebung des Westendes) in Zeitsecunden	Temperatur Cels. Gr.
1869.	Febr.	2.	Hälfte	+ 0.031	5.2
	März	1.	„	+ 0.098	2.5
	„	2.	„	+ 0.080	4.7
	April	1.	„	— 0.009	9.5
	„	2.	„	— 0.065	12.0
	Mai	1.	„	— 0.003	9.6
	„	2.	„	— 0.048	11.8
	Juni	1.	„	— 0.066	12.5
	„	2.	„	— 0.098	12.4
	Juli	1.	„	— 0.153	15.1
	„	2.	„	— 0.194	15.6
	Aug.	1.	„	— 0.191	14.2
	„	2.	„	— 0.218	14.6
	Sept.	1.	„	— 0.204	13.3
	„	2.	„	— 0.162	12.3
	Oct.	1.	„	— 0.147	12.5
	„	2.	„	— 0.024	5.9
	Nov.	1.	„	+ 0.042	3.9
	„	2.	„	+ 0.040	4.0
	Dec.	1.	„	+ 0.093	1.9
	„	2.	„	+ 0.046	4.8
1870.	Jan.	1.	„	+ 0.070	5.3
	„	2.	„	+ 0.199	0.5
	Febr.	1.	„	+ 0.277	— 0.6

Wir nehmen einstweilen an, dass die Nivellirungsresultate gerade für die Mitte jedes halben Monats strenge Geltung hätten und setzen ferner voraus, dass diese Mitten das ganze Jahr in 24 gleiche Theile theilen, welches letztere auch sehr nahe der Fall ist. Die Temperaturen sind die

Quecksilbertemperaturen eines Fortin'schen Barometers, welches an einer Wand des Zimmers unweit vom Passageninstrument hing. Die Formel, welche wir den Messungsresultaten anpassen wollen, sei

$$(2)\quad \text{Neigung} = x_1 + x_2 x + x_3 t + x_4 \sin\frac{360x}{24} + x_5 \cos\frac{360x}{24}$$

worin

t die Temperatur, gezählt vom Mittel aller 24 Temperaturangaben (= 8.48) und

x die von Mitte August 1869, also der Mitte des Beobachtungsjahres, ab gezählten halben Monate,

$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5$ aber zu bestimmende Constanten bedeuten.

x_1 insbesondere ist der constante Theil der Neigung und gilt für Mitte Aug. 69 bei $t = 0^0$,

x_2 ist die der Zeit proportionale Neigungsänderung in einem halben Monate,

x_4 und x_5 sind Constanten zweier sich über ein Jahr erstreckenden Perioden in den Neigungsänderungen.

Für die Mitten der halben Monate wird der Reihe nach:

x	$\frac{360x}{24}$
— 11.5	— 172.5
— 10.5	— 157.5
— 9.5	— 142.5
— 8.5	— 127.5
— 7.5	— 112.5
— 6.5	— 97.5
— 5.5	— 82.5
— 4.5	— 67.5
— 3.5	— 52.5
— 2.5	— 37.5
— 1.5	— 22.5
— 0.5	— 7.5
+ 0.5	+ 7.5
.	.
+ 11.5	+ 172.5

und damit haben wir folgende 24 Fehlergleichungen:

(3)

λ mit Index	$-l$	x_1 mal a	x_2 mal b	x_3 mal c	x_4 mal d	x_5 mal e	s
1	— 31	+ 1	— 11.5	— 3.28	— 0.1305	— 0.9914	— 14.9019
2	— 98	+ 1	— 10.5	— 5.98	— 0.3827	— 0.9239	— 16.7866
3	— 80	+ 1	— 9.5	— 3.78	— 0.6088	— 0.7934	— 13.6822
4	+ 9	+ 1	— 8.5	+ 1.02	— 0.7934	— 0.6088	— 7.8822
5	+ 65	+ 1	— 7.5	+ 3.52	— 0.9239	— 0.3827	— 4.2866
6	+ 3	+ 1	— 6.5	+ 1.12	— 0.9914	— 0.1305	— 5.5019
7	+ 48	+ 1	— 5.5	+ 3.32	— 0.9914	+ 0.1305	— 2.0409
8	+ 66	+ 1	— 4.5	+ 4.02	— 0.9239	+ 0.3827	— 0.0212
9	+ 98	+ 1	— 3.5	+ 3.92	— 0.7934	+ 0.6088	+ 1.2354
10	+ 153	+ 1	— 2.5	+ 6.62	— 0.6088	+ 0.7934	+ 5.3046
11	+ 194	+ 1	— 1.5	+ 7.12	— 0.3827	+ 0.9239	+ 7.1612
12	+ 191	+ 1	— 0.5	+ 5.72	— 0.1305	+ 0.9914	+ 7.0809
13	+ 218	+ 1	+ 0.5	+ 6.12	+ 0.1305	+ 0.9914	+ 8.7419
14	+ 204	+ 1	+ 1.5	+ 4.82	+ 0.3827	+ 0.9239	+ 8.6266
15	+ 162	+ 1	+ 2.5	+ 3.82	+ 0.6088	+ 0.7934	+ 8.7222
16	+ 147	+ 1	+ 3.5	+ 4.02	+ 0.7934	+ 0.6088	+ 9.9222
17	+ 24	+ 1	+ 4.5	— 2.58	+ 0.9239	+ 0.3827	+ 4.2266
18	— 42	+ 1	+ 5.5	— 4.58	+ 0.9914	+ 0.1305	+ 3.0419
19	— 40	+ 1	+ 6.5	— 4.48	+ 0.9914	— 0.1305	+ 3.8809
20	— 93	+ 1	+ 7.5	— 6.58	+ 0.9239	— 0.3827	+ 2.4612
21	— 46	+ 1	+ 8.5	— 3.68	+ 0.7934	— 0.6088	+ 6.0046
22	— 70	+ 1	+ 9.5	— 3.18	+ 0.6088	— 0.7934	+ 7.1364
23	— 199	+ 1	+ 10.5	— 7.98	+ 0.3827	— 0.9239	+ 2.9788
24	— 277	+ 1	+ 11.5	— 9.08	+ 0.1305	— 0.9914	+ 2.5591

worin der dreifache Verticalstrich an Stelle der Gleicheitszeichen steht, l die tausendfachen Beobachtungswerthe und s die Coefficientensummen der Gleichungen bedeutet.

Man erhält nun folgende Normalgleichungen, die sich dadurch, dass sowohl das Mittel der Temperaturen als die Mitte des Jahres zu Ausgangspunkten genommen sind, sehr einfach gestalten und worin $x_1 \ldots x_5$ die tausendfachen Werthe der gleichnamigen Unbekannten bezeichnen:

(4)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
+24.	.	— 0.02	.	.	— 606.
.	+1150.	— 317.15	+91.94	.	+ 6188.0
— 0.02	— 317.15	+ 597.50	—36.15	+70.18	—14470.8
.	+ 91.94	— 36.15	+12.	.	+ 373.24
.	.	+ 70.18	.	+12.	— 1944.33
+23.98	+ 924.80	+ 314.35	+67.79	+82.18	—10459.9

Die Summengleichung stimmt hierin hinreichend mit der Summe der 5 Normalgleichungen.

Bei der Bildung der letzteren war die Kenntniss der Formeln in §. 32. IV. von Nutzen; es war in denselben $n = 24$, $\alpha = \beta = 1$, $q_0 = -172^0.5$, $q = +15^0$ einzuführen und demnach

$$[ad] = [ae] = 0 \text{ nach } A \text{ und } B$$
$$[dd] = [ee] = 12 \text{ nach } F \text{ und } G$$
$$[de] = 0 \text{ nach } D^*.^*)$$

Zur Auflösung nach dem Gauss'schen Verfahren setzen wir, um den Umstand des Fehlens einzelner Coefficienten auszunutzen, das Tableau der Normalgleichungen besser wie folgt:

*) Für die Summen $[bd]$, $[be]$ lassen sich ebenfalls allgemeine Formeln aufstellen, wonach wird

$$[bd] = 12 \csc 7^0.5 = +91.94$$
$$[be] = 0.$$

(5)

x_1	x_5	x_4	x_2	x_3	
+24.	.	.	.	— 0.02	— 606.
.	+12.	.	.	+ 70.18	— 1944.33
.	.	+12.	+ 91.94	— 36.15	+ 373.24
.	.	+91.94	+1150.	— 317.15	+6188.0
— 0.02	+70.18	—36.15	— 317.15	+ 597.50	—14470.8
+23.98	+82.18	+67.79	+ 924.80	+ 314.35	—10459.9

und hieraus bildet man nach und nach das Doppeltableau (ohne Rücksicht auf Gewichtsberechnung, welche hier ziemlich werthlos ist):

(6)

x_1	x_5	x_4	x_2	x_3	
+24.	.	.	.	— 0.02	— 606.
1				— 0.0008	— 25.250
	+12.	.	.	+ 70.18	—1944.33
	1			+ 5.8480	— 162.027
		+12.	+ 91.94	— 36.15	+ 373.24
		1	+ 7.662	— 3.013	+ 31.103
			+ 445.61	— 40.18	+ 3328.5
			1	— 0.09017	+ 7.470
				+ 74.59	— 1676.4
				1	— 22.474
+23.98	+82.18	+67.79	+ 924.80	+ 314.35	—10459.9

Die tausendfachen Werthe der Unbekannten sind:

(7) $x_1 = -25.268 \quad x_2 = +5.4431 \quad x_3 = -22.474$
$x_4 = -78.303 \quad x_5 = -30.599$

die die Normalgleichungen bis auf wenige Einheiten der

ersten Decimale erfüllen. Aus dem letzten Tableau folgt noch mit Hülfe von

(8) $$[ll] = 407998$$

die Summe

(9) $$[\lambda\lambda] = 3516$$

(λ und l tausendfach), dagegen folgt aus nachstehenden Werthen der λ:

(10)

$\lambda_1 = -\ 4.7$	$\lambda_{13} = +\ 17.4$
$\lambda_2 = +\ 12.2$	$\lambda_{14} = +\ 20.3$
$\lambda_3 = \ \ 0.0$	$\lambda_{15} = -\ \ 7.6$
$\lambda_4 = -\ \ 4.8$	$\lambda_{16} = -\ 30.2$
$\lambda_5 = +\ \ 3.8$	$\lambda_{17} = -\ \ 2.8$
$\lambda_6 = -\ \ 1.3$	$\lambda_{18} = -\ 16.1$
$\lambda_7 = -\ \ 8.2$	$\lambda_{19} = -\ \ 2.8$
$\lambda_8 = -\ 13.5$	$\lambda_{20} = +\ \ 9.8$
$\lambda_9 = +\ \ 9.0$	$\lambda_{21} = +\ 14.2$
$\lambda_{10} = -\ 11.3$	$\lambda_{22} = +\ \ 4.5$
$\lambda_{11} = +\ \ 2.2$	$\lambda_{23} = +\ 10.5$
$\lambda_{12} = +\ 14.3$	$\lambda_{24} = -\ 15.5$

(11) $$[\lambda\lambda] = 3506$$

was eine genügende Uebereinstimmung gewährt.

Der mittlere Fehler wird bei 5 Unbekannten und 24 Gleichungen:

(12) $$\mu = \mp\sqrt{\frac{0.003506}{24-5}} = \mp\sqrt{0.0001845} = \mp 0''.0136.$$

Ferner ist für obige (tausendfachen) λ

(13) $$[\lambda] = -\ 1.5$$

in hinreichender Uebereinstimmung mit der theoretischen Summe Null, und weiter hat man

$$[\text{val. abs. } \lambda] = 237.9,$$

daher den Durchschnittsfehler

(14) $$\vartheta = \mp\frac{0.2379}{\sqrt{24\times 19}} = \mp 0''.01114$$

und

(15) $$\mu : \vartheta = 1.22.$$

Nach Substitution der Werthe (7) in die Formel (2) geht dieselbe in folgende Gestalt über:

$$\begin{aligned}\text{Neigung} = &- 0.02527 + 0.0054431\,x \\ &- 0.022474\,(\text{Temp.} - 8.48) \\ &- 0.078303 \sin 15x - 0.030599 \cos 15x\end{aligned} \tag{16}$$

x Anzahl der halben Monate von Mitte August 1869 ab.

Wir können diese Formel noch in eine bequemere Gestalt bringen: Zunächst hat man durch Vergleichung der beiden letzten Glieder

$$0.078303 \sin 15x + 0.030599 \cos 15x$$

mit der Formel

$$A \sin (15x + \varphi) = A \cos\varphi \sin 15x + A \sin\varphi \cos 15x$$

und indem man berechnet

$$\cot \varphi = \frac{0.078303}{0.030599} = 2.5590$$

$$\varphi = 21^0\,20'.7$$

$$A = 0.078303 \sec\varphi = 0.030599 \csc\varphi = 0.084069,$$

das eine sie ersetzende Glied

$$0.084069 \sin (15x + 21^0\,20'\,7). \tag{17}$$

Vereinigt man ferner die Glieder

$$- 0.02527 + 0.022474 \times 8.48 \text{ in } 0.16531,$$

so folgt

$$\begin{aligned}\text{Neigung} = &+ 0.16531 + 0.0054431\,x - 0.022474\ \text{Temp.} \\ &- 0.084069 \sin (15x + 21^0\,20'.7).\end{aligned} \tag{18}$$

Bezeichnet ν die Anzahl der Monate vom Jahresanfange ab, so ist

$$x = 2\nu - 15$$

und dies in (18) eingeführt, giebt die Endformel:

$$\begin{aligned}\text{Neigung} = &\ 0^s.0837 + 0.01089\,\nu - 0.02247\ \text{Temp.} \\ &+ 0.0841 \sin (30\nu - 23^0\,39').\end{aligned} \tag{19}$$

Es ist beispielsweise für die Mitte der 1. Hälfte Sept. $\nu = 8.25$, Temp. $= 13^0.3$, mithin die berechnete Neigung $- 0.1836$. Die beobachtete Neigung ist $- 0.204$, daher λ gleich $+ 0.0204$.

Es ist nun die Frage zu beantworten, ob die Interpolationsformel (16) resp. (19) die beobachteten Neigungen hinreichend genau darstelle.

Hinsichtlich der mittlern Abweichung $\mp 0^{s}.0136$ kann man dies bejahen. Betrachten wir nämlich eine Fehlergleichung in Bezug auf die Zusammensetzung des Beobachtungsfehlers λ, so bemerken wir, dass derselbe sowohl in fehlerhafter Messung der Neigung um ΔN seinen Grund haben kann, als in fehlerhafter Bestimmung der Temperatur um ΔT. Der wahre Beobachtungsfehler ε, welcher einem λ entspricht, ist daher

(20) $$\varepsilon = \Delta N - x_3 \Delta T = \Delta N + 0.0225 \Delta T$$

und der m. F. μ würde schon durch einen mittlern Temperaturfehler von $0^{0}.60$ erklärt werden können, der unter obwaltenden Umständen recht wohl möglich war (sofern das Thermometer nicht im Pfeiler hing). Die λ im Einzelnen betrachtet, kann man sich ebenfalls mit der Darstellung der beobachteten Neigungen zufrieden erklären, denn sieht man ab von einer geringen Periodicität der λ, die sich durch Zerlegung des Tabl. (10) in aufeinanderfolgende positive und negative Gruppen äussert, so genügt die Vertheilung der λ sehr nahe dem Fehlergesetze III: Man hat nämlich (wobei zu beachten, dass $[\lambda]$ nothwendig Null) aus (10) für die 1000fachen Werthe der λ:

(21) Anzahl der posit. Fehler = Anzahl der negat. Fehler
Quadrats. der posit. F. = 1597; der negat. F. = 1909

(22) $$1000\mu_\lambda = \mp \sqrt{\frac{3506}{24}} = \mp 12.1$$

(23)

15 der λ sind absolut genommen	$< \mu_\lambda$	sollte sein	16
9 „ λ „ „ „	$> \mu_\lambda$	für das	8
1 „ λ ist „ „	$> 2\mu_\lambda$	Fehlergesetz	1
11 „ λ sind „ „	$\leqq 0.674\mu_\lambda$	III	12
	$\mu : \vartheta = 1.22$		1.25

Eine genauere Untersuchung der Neigungen, falls sie Werth hätte, müsste mit Benutzung der wahren Pfeilertemperatur, sowie des Feuchtigkeitsgehaltes der Luft erfolgen. Man müsste

ferner bei der Bildung der Mittel der Neigungen für jeden halben Monat mit Hülfe genäherter Werthe der Constanten, wenn das Mittel der Zeiten nicht mit der Mitte des halben Monats zusammenfällt, eine Reduction anbringen, die einige Tausendel Zeitsecunden betragen kann. Endlich müssten alle zu verschiedenen Tageszeiten beobachteten Neigungen mittelst der zu bestimmenden täglichen Variation der Neigung auf eine bestimmte Tagesstunde resp. die maximale oder minimale Neigung reducirt werden.

Die berechnete Formel hat zunächst jedenfalls nur den Werth einer Interpolationsformel; indessen kann man dem Theile derselben, welcher den Temperatureinfluss berücksichtigt, eine allgemeinere Bedeutung beilegen und annehmen, dass der Temperaturcoefficient 0.02247 auch für frühere und spätere nicht allzuentfernte Zeiträume Geltung haben werde. Die andern Glieder der Formel haben aber nur interpolatorischen Werth, da sie hauptsächlich von dem Charakter der stattgehabten Witterung (Bodenwärme u. s. w.) abhängen. Man bemerkt dies auch sofort, indem man die Formel weiter anwendet auf Neigungen nach Febr. 1870. Ende dieses Monats wurde die Axenneigung durch die Lagerstellschrauben geändert, womit eine Aenderung der Constante 0.0837 der Formel (19) verbunden ist. Setzen wir ihren geänderten Werth gleich x_1' so muss, falls die Formel im Uebrigen gilt, sein

$$(24)\quad x_1' = \text{Beob. Neigung} - 0.01089\,\nu + 0.02247\ \text{Temp.} - 0.0841 \sin (30\,\nu - 23^0\,39')$$

worin ν die Anzahl der Monate von 1870.0 ab ist. Nun fand sich aber u. A.:

(25)

Zeit. 1870	Beob. Neigung	Temp.	ν	x_1'
April 2.4	+ 0.030	5.1	3.08	+ 0.033
„ 3.4	+ 0.003	5.7	3.11	+ 0.018
„ 6.5	— 0.018	7.4	3.22	+ 0.033
Juni 3.4	— 0.216	11.3	5.11	— 0.083
Juli 1.2	— 0.297	13.0	6.04	— 0.103
„ 6.4	— 0.280	13.3	6.21	— 0.074

	Zeit. 1870	Beob. Neigung	Temp.	v	x_1'
	Juli 14.5	— 0.369	15.9	6.47	— 0.096
(25)	„ 16.5	— 0.397	17.4	6.53	— 0.088
	„ 24.5	— 0.404	15.9	6.79	— 0.101
	„ 27.5	— 0.437	17.4	6.88	— 0.117
	Aug. 12.4	— 0.448	16.9	7.40	— 0.122
	„ 18.2	— 0.424	14.3	7.58	— 0.151

Hieraus sieht man, dass die Formel mehr und mehr unrichtig wird und nur noch in der Weise verwendet werden darf, dass man sie zur Interpolation benutzt zwischen zwei an nicht zu entfernten Tagen beobachteten Neigungen, aus welchen letzteren der mittlere Werth der Constanten x_1' jedesmal abzuleiten ist. Beispielsweise würden wir für Juli 1.2 bis 16.5 anwenden als Constante

$$- \frac{0.103 + 0.074 + 0.096 + 0.088}{4}$$

womit die Formel wird:

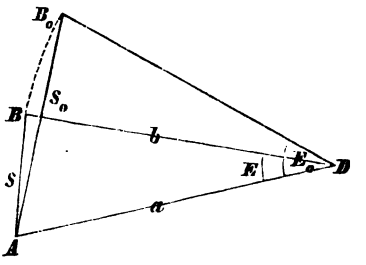
$$\text{(26)} \quad \begin{aligned} \text{Neigung} = &- 0.090 + 0.01089\,v - 0.02247 \text{ Temp.} \\ &+ 0.0841 \sin (30\,v - 23^0\,39') \end{aligned}$$

Beispiel 23. Bekanntlich berechnet man bei Anwendung des Stampfer'schen Nivellirinstruments zum Messen eines Verticalwinkels dessen Grösse aus den beiden Ablesungen m_1 und m_2 an der Höhenschraube für die beiden Richtungen der Visiraxe nach der Formel

$$\text{(1)} \quad \measuredangle (m_1 m_2) = \alpha (m_1 - m_2) + \beta (m_1^2 - m_2^2) \quad m_1 > m_2.$$

Dieselbe bietet aber nur eine Annäherung, welche indessen meist ausreichend ist, indem der Fehler der Theorie (§. 29. II.) wenigstens den Beobachtungsfehler nicht übersteigt. Eine ganz strenge Formel für den Winkelwerth würde jedenfalls unbequem sein, aber sich auch nur unter gewissen Annahmen entwickeln lassen, die die Praxis nicht streng erfüllen kann. Immerhin aber ist die Formel (1) mehr als eine

blosse Interpolationsformel, da sie sich nachweislich der Wirkungsweise des Instruments anschliesst. Diese beruht darauf, dass in einem Dreieck ABD mit der veränderlichen Seite AB die Aenderungen des Winkels E aus denen der Seite sich berechnen lassen. An dem Instrumente ist D eine horizontale Drehaxe, um welche ein oberer Trägerarm BD sich dreht, wenn die Schraube AB gedreht wird, während der Träger AD mit dem Instrumentfusse in fester Verbindung steht. Insbesondere sind A und B die Mittelpunkte der Kugelflächen zweier sphärischen Abschnitte, mittelst deren die Schraube mit den Trägerarmen verbunden ist.



Sei nun B_0 die Lage von B für die Ablesung Null und $\varkappa$ die Höhe eines Schraubenganges, so ist in den Bezeichnungen der Figur für die zu B gehörige Ablesung m

$$s = s_0 - m\varkappa. \tag{2}$$

Der Winkel E aber ist eine Function von s:

$$E = f(s) = f(s_0 - m\varkappa) \tag{3}$$

und daher nach dem Taylor'schen Satze in der üblichen Bezeichnung der Differentialquotienten:

$$E = E_0 - m\varkappa f'(s_0) + \frac{m^2\varkappa^2}{2} f''(s_0) - \frac{m^3\varkappa^3}{6} f'''(s_0) \tag{4}$$

wenn wir Glieder, die in höheren als die dritte Potenz von $m\varkappa$ multiplicirt sind, vernachlässigen.

Es ist aber

$$\cos E = \frac{a^2 + b^2 - s^2}{2ab} \tag{5}$$

und daher in Bogensec.

$$\begin{aligned} \frac{dE}{ds} &= \frac{206265\,s}{ab \sin E} \\ \frac{d^2E}{ds^2} &= \frac{206265}{ab \sin E}\left(1 - \frac{s^2 \cot E}{ab \sin E}\right) \\ \frac{d^3E}{ds^3} &= \frac{206265\,s}{a^2b^2 \sin^3 E}\left(-3\cos E + \frac{s^2(1 + 2\cos^2 E)}{ab \sin^2 E}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Setzen wir ferner

(7) $+ \varkappa f'(s_0) = A, \quad - \frac{\varkappa^2}{2} f''(s_0) = B, \quad + \frac{\varkappa^3}{6} f'''(s_0) = \Gamma$

so wird mittelst der Formeln (6)

$$A = + 206265 \frac{\varkappa s_0}{a b \sin E_0}$$

(8) $$B = - 206265 \frac{\varkappa^2}{2 a b \sin E_0} \left(1 - \frac{s_0^2 \cot E_0}{a b \sin E_0}\right)$$

$$\Gamma = + 206265 \frac{\varkappa^3}{6 a^2 b^2 \sin^3 E_0} \left(- 3 \cos E_0 + \frac{s_0^2 (1 + 2 \cos^2 E_0)}{a b \sin^2 E_0}\right)$$

(9) $$E = E_0 - A m - B m^2 - \Gamma m^3.$$

Für zwei verschiedene Ablesungen m_1 und m_2 erhält man

$$E_1 = E_0 - A m_1 - B m_1^2 - \Gamma m_1^3$$
$$E_2 = E_0 - A m_2 - B m_2^2 - \Gamma m_2^3$$

und es ist daher:

(10) $$\sphericalangle (m_1 m_2) = A (m_1 - m_2) + B (m_1^2 - m_2^2) + \Gamma (m_1^3 - m_2^3)$$
$$m_1 > m_2.$$

Verfasser ermittelte an dem Instr. Nr. 1864 (Eigenthum der polytechn. Schule zu Aachen) folgende Werthe in Millimetern (allerdings nicht mit der grösstmöglichen Schärfe):

$$a = 167 \quad b = 164 \quad s_0 = 86 \quad \varkappa = 0.495$$

womit wird:

(10*) $$\sphericalangle (m_1 m_2) = 639.3 (m_1 - m_2) - 0.131 (m_1^2 - m_2^2) + 0.000326 (m_1^3 - m_2^3).$$

Sonach ist der Einfluss des in die dritte Potenz der Ablesungen multiplicirten Gliedes nicht gering und im Maximum für $m_2 = 0$, $m_1 = 40$ gleich 21″. Bestimmt man jedoch die beiden ersten Constanten mit Vernachlässigung der dritten durch Versuche, welche nach der Methode der kl. Qu. ausgeglichen werden, so wird zugleich auch der durch genannte Vernachlässigung entstehende regelmässige Fehler vermindert, indem die Constanten AB entsprechende Aenderungen erhalten (§. 32. I.).

Um einen Begriff von der Grösse der letztern zu erhalten, nehmen wir an, $AB\Gamma$ seien genau bekannt und die Formel (10) solle ersetzt werden durch Formel (1), sodass die Summe der Quadrate der Abweichungen zwischen beiden

Formeln für alle möglichen Werthe von $m_1 m_2$ ein Minimum werde. Setzen wir die Abweichung (Verbesserung der Näherungsformel) gleich

(11) $v = (A-\alpha)(m_1 - m_2) + (B-\beta)(m_1^2 - m_2^2) + \Gamma(m_1^3 - m_2^3)$

und darin

(12) $$\alpha + \Delta_1 = A$$ $$\beta + \Delta_2 = B$$

so wird auch

(13) $v = \Delta_1(m_1 - m_2) + \Delta_2(m_1^2 - m_2^2) + \Gamma(m_1^3 - m_2^3)$

oder, indem wir v in die beiden Richtungsverbesserungen zerlegen:

(13*) $\lambda_1 - \lambda_2 = \Delta_1(m_1 - m_2) + \Delta_2(m_1^2 - m_2^2) + \Gamma(m_1^3 - m_2^3)$.

Daraus folgt allgemeiner mit Benutzung einer Hülfsunbekannten u, für beliebigen Index von λ:

(14) $$\lambda = \Gamma m^3 + u + \Delta_1 m + \Delta_2 m^2.$$

Wir geben dieser Fehlergleichung das Gewicht dm und erhalten alsdann die Normalgleichungen

(15) $$\begin{aligned} u\int dm + \Delta_1 \int m\,dm + \Delta_2 \int m^2 dm &= -\Gamma \int m^3 dm \\ u\int m\,dm + \Delta_1 \int m^2 dm + \Delta_2 \int m^3 dm &= -\Gamma \int m^4 dm \\ u\int m^2 dm + \Delta_1 \int m^3 dm + \Delta_2 \int m^4 dm &= -\Gamma \int m^5 dm \end{aligned}$$

worin die Integrale von $m = 0$ bis $m = M$, den kleinsten und grössten Werthen von m, zu nehmen sind. Es folgt weiter

(16) $$\begin{aligned} uM + \Delta_1 \frac{M^2}{2} + \Delta_2 \frac{M^3}{3} &= -\Gamma \frac{M^4}{4} \\ u\frac{M^2}{2} + \Delta_1 \frac{M^3}{3} + \Delta_2 \frac{M^4}{4} &= -\Gamma \frac{M^5}{5} \\ u\frac{M^3}{3} + \Delta_1 \frac{M^4}{4} + \Delta_2 \frac{M^5}{5} &= -\Gamma \frac{M^6}{6} \end{aligned}$$

und daraus

(17) $u = -\frac{M^3}{20}\Gamma \quad \Delta_1 = +\frac{3}{5}M^2\Gamma \quad \Delta_2 = -\frac{3}{2}M\Gamma$

d. i. für $M = 40$ und $\Gamma = 0.000326$

(18) $u = -1''.04 \quad \Delta_1 = +0.313 \quad \Delta_2 = -0.0196.$

Ein nach Formel (1) berechneter Winkel würde daher zur Reduction auf Formel (10) zu verbessern sein um

$0.313(m_1 - m_2) - 0.0196(m_1^2 - m_2^2) + 0.000326(m_1^3 - m_2^3)$

d. i. im Maximum etwa 2·Bogensec., also in der That eine kleine Grösse von der Ordnung der Beobachtungsfehler.

Das Institut von Starke und Kammerer giebt für das erwähnte Instrument Nr. 1864 die Formel (1):

$$639.88\ (m_1 - m_2) - 0.0960\ (m_1^2 - m_2^2)$$

während unsere Abmessungen nach (10*. 12. 18) geben

$$639.0\ (m_1 - m_2) - 0.111\ (m_1^2 - m_2^2).$$

Die Differenz beider Formeln ist nicht nur in der ungenauen Abnahme der Dimensionen, sondern, was die zweite Constante anlangt, auch darin zu suchen, dass das Instrument die Voraussetzung einer gleichmässig geschnittenen Schraube und genau sphärischer Abschnitte nicht streng erfüllen wird. Einer geringen Abweichung von diesen Voraussetzungen kann entsprochen werden, indem man anstatt Gl. (2) setzt

$$s = s_0 - m\varkappa(1 + mk_1 + m^2k_2 + \ldots)$$

worin k_1, k_2 ... Constante bezeichnen.

VII. Abschnitt.

Verschiedene Anwendungen.

Beispiel 24. I. Ueber den mittlern Fehler des Nivellirens. Es ist bekannt, dass wegen der Veränderlichkeit des Luftzustandes und wegen der Unregelmässigkeiten der mathematischen Erdgestalt die geometrischen Nivellements aus kurzen Distanzen (sagen wir: beiläufig gegen 50 Meter) die vorzüglichste Art der Bestimmung von Höhenunterschieden gewähren. Die Anwendung strenger Ausgleichungsprincipien auf so genaue Messungen ist daher am Platze und wir wollen hierauf näher eingehen.

Wir setzen ein zusammengesetztes Nivellement voraus. Die Punkte, welche benachbarten Stationen gemeinsam sind, heissen Anbindepunkte, die nicht gemeinsamen Nebenpunkte. Wir setzen ferner ein justirtes Instrument voraus; um aus dem ganzen Nivellementszug aber etwaige Fehlerreste und Fehleränderungen zu eliminiren, werde das Instrument zu den beiden Anbindepunkten immer in gleiche

Distanz gebracht. Für die Nebenpunkte ist diese Vorsicht nicht von Nöthen, da sie isolirt stehen und keine Fehlerfortpflanzung von ihnen aus stattfindet.

Es sei uns nun gegeben ein Nivellirinstrument und eine Latte zum Selbstablesen, dann wird die Frage interessiren, wie werden wir das Nivellement am rationellsten ausführen, d. h. ohne vergleichsweise übergrossen Zeitaufwand möglichste Genauigkeit erzielen können. Sei die Länge der zu nivellirenden Strecke L und die Möglichkeit vorhanden, nicht nur die Länge der Stationen (Entfernung zwischen 2 Anbindepunkten) immer gleich derselben Grösse s zu nehmen, sondern auch das Instrument in die Mitte der geraden Verbindungslinie zu stellen, also immer aus der Distanz $\frac{s}{2}$ die Latte zu visiren. Sei ferner μ_s der mittlere Fehler der Lattenhöhe für die Distanz $\frac{s}{2}$ (oder die Stationslänge s). Dann haben wir für n Stationen den mittlern Fehler M des Höhenunterschieds zwischen Anfangs- und Endpunkt gleich

(1) $$M = \mu_s \sqrt{2n}.$$

Nennen wir nämlich für jede Station den Lattenfehler für rückwärts ε, für vorwärts ε' und unterscheiden die einzelnen Stationen mit untern Indices $1, 2 \ldots n$, so ist der Fehler des Höhenunterschieds (Endpunkt über Anfangspunkt) gleich

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_1') + (\varepsilon_2 - \varepsilon_2') + \ldots + (\varepsilon_n - \varepsilon_n')$$

und da die Anzahl dieser Fehler ε und ε' $2n$ ist, der mittlere Werth jedes aber μ_s, so ergiebt sich leicht

$$M^2 = \mu_s^2 \cdot 2n$$

woraus Formel (1) resultirt.

Näherungsweise gilt nun die Relation

(2) $$L = ns$$

womit wir erhalten

(3) $$M = \frac{\mu_s}{\sqrt{s}} \cdot \sqrt{2L}$$

und hiernach wird der Höhenunterschied um so genauer, je kleiner $\frac{\mu_s}{\sqrt{s}}$ ist.

Was diesen Quotienten anlangt, so weiss man, dass näherungsweise μ_s direct proportional s zunimmt. Von äussern Einflüssen abgesehen, gilt dies streng nur für denjenigen Theil von μ_s, welcher von der Unsicherheit im Einstellen der Libelle herrührt, indem ein Fehler im Einstellen der Libelle einem Neigungsfehler der Visiraxe entspricht, der sich mit der Distanz multiplicirt. Dagegen nimmt der Visurfehler nicht einfach mit der Distanz zu, weil wir immer dieselbe Latte anwenden; er würde es nur dann, wenn das im Fernrohr gesehene Bild der Lattentheilung stets constante Dimensionen zeigte, in Wahrheit also die Lattentheilung sich proportional der Entfernung vergrösserte. Dies ist nicht der Fall; wir sind gezwungen für verschiedene scheinbare Grössen der Lattentheilung abzulesen, also beispielsweise einen Centimeter für verschiedene scheinbare Grössen nach dem Augenmaasse in Millimeter einzutheilen.

Wenn wir nun für eine gewisse scheinbare Grösse diese Schätzung auf einen Millimeter genau bewirken, so wird sie für die doppelte scheinbare Grösse keineswegs auf $^1/_2$ Millimeter genau. Nur innerhalb kleiner Aenderungen der Distanz kann man annehmen, dass die Genauigkeit dieser Schätzung proportional der scheinbaren Grösse der Bilder oder umgekehrt proportional der Entfernung s ist.

Abgesehen von äussern Einflüssen haben wir somit

$$\mu_s^2 = \mu_i^2 \cdot \frac{s^2}{4} + \mu^2_{v,s} \tag{4}$$

worin μ_i den mittlern Fehler der Libelleneinstellung in Bogenmaass und $\mu_{v,s}$ den mittlern Visurfehler für die Entfernung $\frac{s}{2}$ bezeichnen, welcher die Form $\alpha \frac{s}{2} S$ hat, worin α ein Constante und S eine mit s sich nur langsam ändernde Function ist.

μ_s ist nach Formel (4) jedenfalls auch dann sehr nahe s direct proportional, wenn die Libelle vergleichsweise viel ungenauer einzustellen ist, als der Kraft des Fernrohrs entsprechen würde; ein Umstand, der sich darin äussert, dass bei wiederholtem Einstellen des Fernrohrs auf ein Object die Libelle genau dieselbe Stellung einnimmt — dagegen bei wiederholtem Einstellen der Libelle das Fernrohr nicht genau auf dieselbe Höhe zeigt.

Um im einzelnen Falle über die Zusammensetzung von μ_s ins Klare zu kommen, stellen wir nach Hagen Versuche in der Weise an, dass wir für eine Reihe Entfernungen $1 \cdot \frac{s_0}{2}$, $2 \cdot \frac{s_0}{2}$, $3 \cdot \frac{s_0}{2}$, ... das Fernrohr nach der Latte richten, die Libelle einspielen lassen, eine Ablesung machen, alsdann die Libelle verstellen und wieder zum Einspielen bringen, wieder ablesen und s. f. und für jede Entfernung nun die Lattenablesungen zu einem Mittel vereinigen und aus den Abweichungen vom Mittel alsdann μ_s ermitteln.

Zweckmässig dürfte es auch sein, die Libelle anstatt zum Einspielen zu bringen, sie unbeträchtlich zu verstellen und für jede abgelesene Lattenhöhe durch Rechnung die Lattenhöhe bei einspielender Libelle zu ermitteln. Dadurch erhält man eine grössere Unabhängigkeit der zu vergleichenden Resultate.

Da jedoch hierbei eine regelmässige Libelle vorausgesetzt wird, so ist es meist vorzuziehen, in noch andrer Weise zu verfahren: Man bestimmt nämlich für jede der erwähnten Entfernungen einen Höhenunterschied zweier dicht neben einander befindlichen Punkte mehrere Male, wobei man den Stand der Libelle für beide Objecte bei jeder Messung des Höhenunterschieds zwar gleich zu nehmen hat, ihn aber für verschiedene Messungen variiren kann. Es gewährt dies Verfahren den doppelten Vortheil, unabhängig von der Libellenkrümmung zu sein, sowie verschiedene Zielhöhen auch für die mit einander zu vergleichenden Beobachtungen anzuwenden zu gestatten und also eine grössere Unabhängigkeit derselben zu geben.

Hat man nun m Werthe und durch Vergleichung mit dem arithmetischen Mittel m Fehler erhalten, so bilde man deren Quadratsumme, dividire durch $(m - 1)$ und erhält so μ_s^2. Es ist erleichternd für den Calcul, für alle Entfernungen s die Anzahl m der Versuche gleich gross anzunehmen.

Beispielsweise geben wir Versuche Hagen's (Wahrscheinlichkeitsrechnung pag. 167).

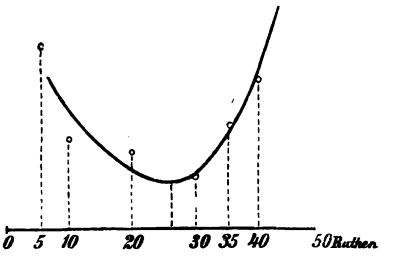
Er fand für eine in weisse und schwarze Zolle getheilte Latte:

(5)

Entfernung in Ruthen	μ_s^2	$2\mu_s^2 : s$	$4\mu_s^2 : s^2$
1. $\frac{s_0}{2} = 5$	0.00175	0.000350	0.0000700
2. $\frac{s_0}{2} = 10$	0.00175	0.000175	0.0000175
4. $\frac{s_0}{2} = 20$	0.00300	0.000150	0.0000075
6. $\frac{s_0}{2} = 30$	0.00268	0.000089	0.0000030
7. $\frac{s_0}{2} = 35$	0.00667	0.000193	0.0000055
8. $\frac{s_0}{2} = 40$	0.01074	0.000269	0.0000067
10. $\frac{s_0}{2} = 50$	0.02933	0.000587	0.0000117
12. $\frac{s_0}{2} = 60$	0.09475	0.001579	0.0002633

Bei diesen Versuchen ist freilich die Ocularröhre nie verstellt worden, doch wollen wir davon absehen und annehmen, sie sei verstellt worden. Denn wenn auch beim Nivellement selbst unter Umständen durch eine Verstellung der Ocularröhre der Parallelismus von Visiraxe und Libellenaxe gestört werden kann, so hat dies bei obigen Versuchen doch nichts zu sagen; im Gegentheil ist es bei denselben nöthig, dass man die Latte deutlich sieht, da ja beim Nivelliren mit constanter Stationslänge ohne Zweifel ein Jeder die Ocularstellung der letztern anpassen wird. Ob es zweckmässig ist, auch die Nebenpunkte ohne Verstellung der Ocularröhre anzuvisiren oder nicht, lässt sich allgemein nicht entscheiden, und hat für uns, die wir dieselben nicht weiter beachten, keinen Werth.

Um den Werth von s, für welchen $\frac{2\mu^2}{s}$ ein Minimum ist, zu erhalten, construiren wir mit den Abscissen s und den Ordinaten $\frac{2\mu^2}{s}$ eine Punktreihe, die wir mit Rücksicht darauf, dass die $\frac{2\mu^2}{s}$ doch selbst nicht ganz scharf bestimmt sind, durch eine einfache Curve graphisch ausgleichen; die kleinste Ordinate dieser Curve liegt bei $s = 26$ Ruthen und wenn wir diese anwenden, wird M ein Minimum:



Bis jetzt haben wir keine Rücksicht darauf genommen, dass die auf das Nivellement zu verwendende Mühe nahezu proportional der Anzahl n der Stationen ist. Nehmen wir nun, um dies zu berücksichtigen, an, dass das Nivellement auf demselben Wege oder anderen nahe gleichlangen m mal wiederholt werde, d. h., dass der Höhenunterschied m mal bestimmt werde, so ist alsdann der mittlere Fehler des Mittels aller m Bestimmungen

$$M = \frac{\mu_s}{\sqrt{ms}} \cdot \sqrt{2L}. \tag{6}$$

Die Mühe ist nun proportional mn. Um auf constante Mühe zu reduciren, setzen wir

$$mn = c \ (= \text{Constante})$$

und haben damit für den mittlern Fehler des Endresultats:

$$M = \frac{\mu_s}{s} \cdot L \sqrt{\frac{2}{c}}. \tag{7}$$

Ein Blick auf die Werthe von $\frac{\mu_s^2}{s^2}$ in unserm Beispiele zeigt, dass die günstigste Stationslänge s unter Voraussetzung constanter Mühe etwas über 30 Ruthen beträgt.

Wegen der äussern Einflüsse: verschiedene Krümmung der Refractionscurven wie der mathematischen Erdgestalt nach beiden Seiten vom Instrument aus, deren Einfluss mit der Entfernung wächst (und in obigen μ^2 nicht berücksichtigt ist), wird die günstigste Stationslänge eher etwas kleiner als grösser, wie die oben gefundene, zu nehmen sein. Für feine Messungen scheint eine Stationslänge von 125^m ($=s$) schon zu bedeutend zu sein (Bauernfeind. Bayer. Präcis. Niv. 1870 pag. 9, 44 und 45).

II. Näherungsrelation zwischen den mittlern Fehlerquadraten von Höhenunterschieden, die mit demselben Instrument ermittelt worden sind.

Das Quadrat des mittlern Fehlers eines beobachteten Höhenunterschieds ist nach Gl. (1) proportional der Anzahl der Stationen; vergleichen wir daher Nivellements, welche mit demselben Instrument und derselben Stationslänge ausgeführt worden sind, so ist das Verhältniss der Anzahlen ihrer Stationen auch das Verhältniss ihrer mittlern Fehlerquadrate. Verstehen wir nun unter Länge der Nivellementslinie die Summe der betreffenden Stationslängen, so hat man endlich:

Die mittlern Fehlerquadrate sind direct proportional den Nivellementslängen (Voraussetzung: Instrument und Stationslänge constant).

In der Regel wird in der Praxis die eine Bedingung zur Gültigkeit dieses Satzes nicht zu erfüllen sein, nämlich Gleichheit der Stationslängen sowohl innerhalb jedes einzelnen Nivellements, als auch für die zu vergleichenden Nivellements überhaupt. Es wird dies hauptsächlich durch die Terrainbeschaffenheit bedingt. Wendet man trotzdem den obigen Satz an, so erhält man für das Verhältniss der Fehlerquadrate nur einen Näherungswerth, der jedoch dem strengen Werth sehr nahe kommen wird, falls die durchschnittlichen Stationslängen für die verglichenen Nivellements nahezu gleich sind:

In aller Strenge ist entsprechend (1)

$$M^2 = 2\left[\mu^2_{s_i}\right]_{i=1}^{i=n} \tag{8}$$

und setzen wir nun $\mu^2_{s_i} = f(s_i)$, einer Function von s_i, und ferner die mittlere Stationslänge $s_m = \frac{[s_i]}{n}$, so ist nach dem Taylor'schen Satze

$$\mu^2{}_{s_i} = \mu^2{}_{s_m} + (s_i - s_m)\frac{df(s_m)}{ds_m} + \tfrac{1}{2}(s_i - s_m)^2\frac{d^2f(s_m)}{ds_m{}^2} + R$$

worin R die Glieder mit den höhern Differentialquotienten bezeichnet. Daraus folgt

$$(9) \qquad M^2 = 2n \left\{ \mu_{s_m}^2 + \frac{[(s_i - s_m^2)]}{n} \frac{d^2 f(s_m)}{2 d s_m^2} + \frac{[R]}{n} \right\}$$

Setzt man nun nach (4)

$$f(s_m) = \mu_{s_m}^2 = \frac{s^2 m}{4} (\mu_l^2 + \alpha^2 S_m^2)$$

so ist

$$\frac{d^2 f(s_m)}{2 d s_m^2} = \frac{\mu_l^2 + \alpha^2 S^2 m}{4} = \frac{\mu_{s_m}^2}{s_m^2}$$

abgesehen von der Aenderung von S_m, die in der That nicht in Betracht kommt, falls die mittlere Abweichung σ der Stationslängen

$$(10) \qquad \sigma^2 = \frac{[(s_i - s_m)^2]}{n}$$

nicht erheblich ist. Damit verschwinden die höheren Differentialquotienten und also auch $[R]$ und es wird

$$(11) \qquad M^2 = 2n\mu_{s_m}^2 \left(1 + \frac{\sigma^2}{s_m^2}\right).$$

Hiernach kann man beurtheilen, welchen Fehler man begeht, wenn man bei Vergleichung von verschiedenen Nivellements, die mit demselben Instrumente ausgeführt sind, die mittlern Fehlerquadrate proportional den Nivellementslängen setzt.

Selbst für gleiche s_m und also auch gleiche μ_{s_m} können die M^2 wegen verschiedener σ verschieden sein. Immerhin wird es eine oftmals genügende Annäherung geben, wenn man in Ermangelung der Kenntniss über die Abhängigkeit von μ_s und s setzt:

$$(12) \qquad M^2 = 2n\mu_{s_m}^2 \qquad \mu_{s_m}^2 = \varkappa s_m^2$$

worin $\varkappa$ eine Constante bedeutet. Da nun $L = n s_m$ ist, so wird

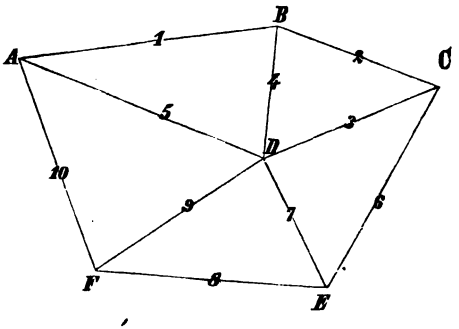
$$(13) \qquad M^2 = 2\varkappa L s_m.$$

Hiernach verhalten sich die mittlern Fehlerquadrate von Nivellements, die mit demselben Instrument ausgeführt sind, näherungsweise wie die Producte aus Nivellementslänge und mittlerer Stationslänge.

Die Ausgleichung eines Nivellementsnetzes, welches mit einem und demselben (oder identischen) Nivellirinstrumenten

nivellirt worden ist, kann nach diesen Sätzen in den meisten Fällen mit hinreichender Annäherung erfolgen. Da man bei der Ausgleichung anstatt der mittlern Fehlerquadrate Gewichtszahlen einführt, so sind also dieselben umgekehrt proportional den Producten aus Stationslänge und Nivellementslänge zu nehmen — wobei man sich aber mit abgerundeten Zahlen begnügen darf.

III. Ausgleichung geometrischer Nivellements.



Es seien nivellirt worden die Höhenunterschiede:

(14)

$$\begin{aligned}
\binom{B}{A} &= l_1 \text{ mit dem mittlern Fehler } \mu_1 \\
\binom{C}{B} &= l_2 \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad \mu_2 \\
\binom{D}{C} &= l_3 \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad \mu_3 \\
\binom{D}{B} &= l_4 \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad \mu_4 \\
\binom{D}{A} &= l_5 \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad \mu_5 \\
\binom{E}{C} &= l_6 \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad \mu_6 \\
\binom{E}{D} &= l_7 \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad \mu_7 \\
\binom{F}{E} &= l_8 \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad \mu_8 \\
\binom{F}{D} &= l_9 \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad \mu_9 \\
\binom{F}{A} &= l_{10} \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad \mu_{10}
\end{aligned}$$

Diese Höhenunterschiede müssen 5 Bedingungsgleichungen erfüllen, denn um die Höhen der 5 Punkte $BCDEF$ über A festzustellen reichen schon 5 Höhenunterschiede l aus, es sind daher 5 andere überschüssig. Die einfachsten Formen der 5 Gleichungen werden erhalten aus den (krummlinigen) Dreiecken ABD, BDC u. s. f.; sie lauten:

$$\begin{aligned} l_1 + l_4 - l_5 &= 0 \\ l_2 + l_3 - l_4 &= 0 \\ l_3 + l_7 - l_6 &= 0 \\ l_7 + l_8 - l_9 &= 0 \\ l_9 + l_5 - l_{10} &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

Diese Gleichungen werden aber von den l nicht erfüllt, sondern es ergeben sich anstatt Null Widersprüche $w_1\ w_2 \ldots$. Bezeichnen wir die Verbesserungen der l mit λ, so hat man für diese λ die 5 Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_4 - \lambda_5 + w_1 &= 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 + w_2 &= 0 \\ \lambda_3 + \lambda_7 - \lambda_6 + w_3 &= 0 \\ \lambda_7 + \lambda_8 - \lambda_9 + w_4 &= 0 \\ \lambda_9 + \lambda_5 - \lambda_{10} + w_5 &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

und hieraus sind die λ nach der Methode d. kl. Qu. zu bestimmen durch Bildung der 10 Correlatengleichungen und 5 Normalgleichungen.

Es ist jedoch nicht nothwendig, nach bedingten Beobachtungen auszugleichen. Betrachten wir die Höhenunterschiede von $BCDEF$ über A als Unbekannte $xyztu$, so hat man auch zur Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + x \\ \lambda_2 &= -l_2 - x + y \\ \lambda_3 &= -l_3 - y + z \\ \lambda_4 &= -l_4 - x + z \\ \lambda_5 &= -l_5 + z \\ \lambda_6 &= -l_6 - y + t \\ \lambda_7 &= -l_7 - z + t \\ \lambda_8 &= -l_8 - t + u \\ \lambda_9 &= -l_9 - z + u \\ \lambda_{10} &= -l_{10} + u \end{aligned} \tag{17}$$

und zwar findet man dieses System unmittelbar aus (14) bequemer, als nach §. 22. I. aus (15) und (16).

Die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen hat den Vorzug, dass sie in bequemer Weise die Gewichte der Höhenunterschiede der Punkte mit dem Anfangspunkte A ergiebt. Die Anzahl der aufzulösenden Normalgleichungen ist bei Ausgleichung nach

(18)

bedingten Beob.	vermittelnden Beob.
$N-(P-1)$	$P-1$

wenn N die Anzahl der Nivellements und P die Anzahl der Punkte ist. (Vergl. S. 179.)

IV. Alle Punkte, welche nicht wenigstens mit 3 andern verbunden sind, können aus der Hauptausgleichung ausgeschlossen werden. Nennen wir diese Punkte Zwischenpunkte im Gegensatz zu den Knotenpunkten, auf welche die letztere sich bezieht, so wird es sich darum handeln, nachträglich die ausgeglichenen Höhen der Zwischenpunkte festzustellen.

Nehmen wir beispielsweise auf AB zwei Zwischenpunkte an, welche l_1 in $l_1'\ l_1''\ l_1'''$ zerlegen:

$$l_1 = l_1' + l_1'' + l_1''' \tag{19}$$

und gehören zu diesen die mittlern Fehler $\mu_1'\ \mu_1''\ \mu_1'''$, wofür die Relation bestehen muss:

$$\mu_1^2 = \mu_1'^2 + \mu_1''^2 + \mu_1'''^2; \tag{20}$$

sind endlich $g_1\ g_1'\ g_1''\ g_1'''$ die entsprechenden Gewichte und denken wir uns nach bedingten Beobachtungen im Anschluss an (15) und (16) ausgeglichen, so tritt an Stelle der 1. Gleichung (16) eine Gleichung

$$\frac{\lambda_1'}{g_1'} + \frac{\lambda_1''}{g_1''} + \frac{\lambda_1'''}{g_1'''} + \lambda_4 - \lambda_5 + w_1 = 0$$

woraus man findet, dass

$$\lambda_1' g_1' = \lambda_1'' g_1'' = \lambda_1''' g_1''' \tag{21}$$

sein muss. Nun ist aber wegen (19)

$$\lambda_1' + \lambda_1'' + \lambda_1''' = \lambda_1 \tag{22}$$

und λ_1 bereits in aller Strenge bekannt; berücksichtigt man

ferner, dass näherungsweise die g den nivellirten Strecken nahezu umgekehrt proportional sind, so hat man:

Es ist die Verbesserung des Höhenunterschieds zweier benachbarter Knotenpunkte auf die Höhenunterschiede der Zwischenpunkte proportional den zwischenliegenden Nivellementslängen zu vertheilen.

V. Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit, welchen die Ausgleichung ergiebt, kann verglichen werden mit Bestimmungen dieses Fehlers durch wiederholtes Nivelliren eines und desselben Höhenunterschieds mit Hülfe nur einer Aufstellung. Wenn nun jener erheblich grösser ist, so ist dies ein Zeichen des Vorhandenseins von Fehlerquellen, die bei der Vergleichung der Resultate für den einen Unterschied nicht aufgedeckt werden konnten. Von Instrumentalfehlern abgesehen, sind zu diesen Fehlerquellen besonders die beiden schon S. 306 angeführten Ursachen zu rechnen.

Beispiel 25. Verschiedene Methoden der Horizontalwinkelmessung mit Theodoliten.

I. Von den Fehlern, welchen die Messung der Horizontalwinkel unterworfen ist, wollen wir nur die Visurfehler und die Theilungs- und Ablesungsfehler berücksichtigen. Die andern Fehler, als Instrumentalfehler, Centrirungsfehler des Theodoliten und der Signale, Aenderungen des Instrumentes und seiner Aufstellung mit der Zeit beachten wir dagegen nicht, indem wir voraussetzen, dass sie einestheils als Null anzunehmen sind oder anderntheils durch Beobachten in beiden Instrumentlagen und entgegengesetzter Reihenfolge der Objecte eliminirt sind.

Der Winkelfehler setzt sich zusammen aus den Fehlern der beiden Richtungen. Es sei nun, im Sinne von Verbesserungen, für eine Richtung mit der Ablesung A

(1)
$$\begin{cases} v \text{ der Visurfehler,} \\ t \text{ der Theilungsfehler,} \\ a \text{ der Ablesungsfehler im engern Sinne, daher} \\ b = a + t \text{ der Ablesungsfehler im weitern Sinne,} \end{cases}$$

so ist die

(2) Corrigirte Ablesung $= A + v + a + t.$

Der Visurfehler v hat im Allgemeinen einen zufälligen Charakter, wenn wir von den besonderen Fällen constanter und regelmässiger lateraler Refractionen, oder Objecten mit körperlicher Beleuchtung u. s. w. absehen.

Der Ablesungsfehler a hat ebenfalls einen zufälligen Charakter, wobei wir voraussetzen, dass die Fehler der Nonien oder Schraubenmikroskopmikrometer in Rechnung gezogen sind, sowie von dem persönlichen Fehler absehen, welcher etwa bei Ablesung der Nonien oder Einstellen der Mikrometerfäden entsteht, weil sich derselbe in der Differenz der Richtungsangaben für beide Objecte weghebt.

Der Theilungsfehler t ist constant oder mehr oder weniger regelmässig — je nach Umständen. Constant ist er, wenn bei mehreren Messungen desselben Winkels die betreffende Richtungsablesung immer an demselben Theilstrich erfolgt, die Bezifferung des Kreises also zu den Winkelschenkeln immer dieselbe Lage erhält. Dagegen ändert sich der Theilungsfehler, wenn der Kreis für die verschiedenen Messungen verschiedene Lagen erhält, und bei grösseren Instrumenten lässt sich der Kreis in der That, um dies erreichen zu können, allein für sich drehen. Vergleichen wir nur solche Messungen, so erhalten wir mithin im Allgemeinen gleichzeitig andere Werthe der Fehler $v\ a\ t$, jedoch für die t mit dem Unterschiede, dass sie keinen streng zufälligen Charakter haben:

Die Untersuchung feingearbeiteter Theilkreise hat dargethan, dass die Theilungsfehler von Strich zu Strich nicht etwa bald positiv, bald negativ, bald gross, bald klein auftreten, sondern mehrfach langsam zu- und abnehmen und in Folge dessen mehrere positive und negative Maxima erreichen. Allerdings trifft Letzteres nur im Allgemeinen zu, denn innerhalb des allmäligen Wachsens und Abnehmens finden kleine Unregelmässigkeiten statt.

Graphisch kann man sich dieses recht deutlich machen, indem man auf der Peripherie eines Kreises, welcher eingetheilt ist, die Theilungsfehler in einem grossen Maassstabe senkrecht zum Umfange aufträgt, nach aussen die positiven, nach innen die negativen. Die Verbindungslinie der so erhaltenen Punkte wird die Peripherie mehrmals schneiden

und zwischen je zwei Schnitten wird ein positives oder negatives Fehlermaximum liegen. Anstatt die gebrochene Verbindungslinie zu zeichnen, zieht man eine allmälig anwachsende und abfallende Curve zwischen den Punkten hindurch; (vergl. die graphische Ausgleichung S. 305 u. 306); die Ordinaten dieser Curve nennt man die regelmässigen Theilungsfehler t_r, die Ueberschüsse der wahren Ordinaten über die Curvenordinaten die zufälligen Theilungsfehler t_z.

Man denkt sich demgemäss jeden Theilungsfehler zusammengesetzt aus 2 Theilen; der erste Theil ist abhängig von der Bezifferung des Theilstriches und ändert sich langsam mit derselben; der zweite Theil ist unabhängig von der Bezifferung und von Strich zu Strich bald positiv, bald negativ.

Die Möglichkeit regelmässiger Theilungsfehler erhellt aus der nähern Betrachtung der Herstellung einestheils der Originaltheilung der Theilmaschine, anderntheils aus der Art des Copirens derselben und ist die Ursache wohl hauptsächlich die durch Temperaturänderungen bewirkte ungleichmässige Ausdehnung der Limben.

Während man den zufälligen Theilungsfehler bestimmt durch Vergleichung benachbarter Intervalle, auf deren relative Grösse der langsam fortschreitende regelmässige Fehler fast einflusslos ist, bestimmt man diesen durch Vergleichung grösserer Bögen, die aliquote Theile der Kreisperipherie sind, wodurch eine absolute Bestimmung möglich wird.

Man passt schliesslich dem regelmässigen Fehler t_r eine Interpolationsformel in Form einer periodischen Reihe an*), z. B.:

$$(3)\quad t_r = \alpha + \beta \sin(A+\nu_1) + \gamma \sin(2A+\nu_2) + \delta \sin(3A+\nu_3) + \ldots$$

Es liegt in der Definition des regelmässigen Fehlers begründet, dass die Anzahl der Glieder dieser Formel beschränkt ist. Schon ein dreizehntes Glied ist nämlich in $\sin(12A + \nu_{12})$ multiplicirt und für eine Aenderung in A von nur 30^0 erhält dasselbe seinen anfänglichen Werth wieder.

Durch Anwendung zweier diametraler Nonien oder Mikroskope erhält man für jede Ablesung das Mittel zweier

*) Wir lassen dahin gestellt, ob dies in allen Fällen räthlich ist, z. B. bei unverkennbaren Discontinuitäten in der Grösse aufeinanderfolgender Theilungsfehler.

zufälligen und zweier regelmässigen Theilungsfehler. Betrachten wir aber zwei Ablesungen A und $A + 180^0$, so ist im Mittel für die beiden Theilungsfehler einfacher

$$(4) \quad \frac{[t_r]}{2} = \alpha + \gamma \sin(2A + \nu_2) + \varepsilon \sin(4A + \nu_4) + \ldots$$

Es leuchtet ein, dass durch 3, 4, . . m regelmässig vertheilte Nonien oder Mikroskope die regelmässigen Theilungsfehler mehr und mehr unschädlich gemacht werden können. Für m Mikroskope, die in den Abständen $\frac{360}{m}$ von einander liegen, haben die Ablesungen annähernd folgende Werthe:

$$A \quad A + \frac{360}{m} \quad A + 2\frac{360}{m} \quad \ldots A + (m-1)\frac{360}{m}$$

und dies in Formel (3) eingeführt, erhält man leicht den Einfluss des periodischen Theilungsfehlers auf das Mittel der m Ablesungen gleich

$$(5) \quad \frac{[t_r]}{m} = \alpha + \text{Glieder, welche multiplicirt sind in } \sin(mA_1 + \nu_m), \sin(2mA_1 + \nu_{2m}) \ldots$$

Durch die Vermehrung der Anzahl der Nonien und Mikroskope wird nun freilich die Ablesungsarbeit sehr vermehrt, sodass man in der Regel nur 2 bis 4 solcher anwendet, t_r aber in andrer Weise zu eliminiren sucht. Wir müssen nämlich bedenken, dass die Richtungsangaben auch wegen des Visurfehlers fehlerhaft sind und dass man, um dessen Einfluss zu vermindern, mehr als eine Beobachtung anstellen muss. Kann man nun bei dieser Gelegenheit t_r für das Mittel aller Beobachtungen auf einen wünschenswerthen Betrag herabdrücken, so ist dies vorzuziehen. (In der praktischen Astronomie kommt es freilich oft vor, dass man m mit Vortheil gross nimmt, etwa $= 6$ oder 8, wenn nämlich die Fernröhre sehr kräftig sind (μ_v relativ sehr klein ist) und die Objecte nur ein Mal beobachtet werden können.) Sei nun

μ_v der mittlere Werth des Visurfehlers v,

μ_a „ „ „ „ Ablesungsfehlers a bei Anwendung eines Nonius oder Mikroskopes,

μ_z der mittlere Werth des zufälligen Theilungsfehlers bei Anwendung eines Nonius oder Mikroskopes,

so wird bei Anwendung von m Nonien, indem (2) übergeht in

$$(6) \qquad \text{Corr. Ablsg.} = A + v + \frac{[a]}{m} + \frac{[t_s]}{m} + \frac{[t_r]}{m}$$

das Quadrat des mittlern Fehlers des Ablesungsmittels einer Richtungsangabe gleich

$$(7) \qquad \mu_v^2 + \frac{\mu_a^2}{m} + \frac{\mu_z^2}{m} + \left(\frac{[t_r]}{m}\right)^2$$

welche Formel nach den Entwicklungen des §. 6. leicht zu erhalten ist, wenn man bedenkt, dass der durchschnittliche Werth des Productes aus einem zufälligen und einem constanten Fehler Null ist.

Der Winkel, als Differenz zweier corrigirten Ablesungen, ergiebt sich zu

$$(8) \qquad \text{Corr. Winkel} = W + (v' - v) + \frac{[a'] - [a]}{m} + \frac{[t_s'] - [t_s]}{m} + \frac{[t_r'] - [t_r]}{m}$$

worin $v'\ a'\ldots$ sich auf das rechtsliegende Object, $v\ a\ldots$ auf das linksliegende Object beziehen. Das Quadrat des mittlern Fehlers des Winkels wird

$$(9) \qquad 2\mu_v^2 + \frac{2\mu_a^2}{m} + \frac{2\mu_s^2}{m} + \left(\frac{[t_r'] - [t_r]}{m}\right)^2.$$

Messen wir den Winkel n Mal an verschiedenen Stellen des Theilkreises, so wird der corrigirte Winkel, das Mittel der n Messungen mit W bezeichnet:

$$(10) \qquad \text{Corrigirter Winkel} = W + \frac{[v'] - [v]}{n} + \frac{[[a'] - [a]]}{mn} + \frac{[[t_z'] - [t_z]]}{mn} + \frac{[[t_r'] - [t_r]]}{mn}$$

mit dem mittlern Fehlerquadrat:

$$(11) \qquad \frac{2\mu_v^2}{n} + \frac{2\mu_a^2}{mn} + \frac{2\mu_z^2}{mn} + \left(\frac{[[t_r'] - [t_r]]}{mn}\right)^2$$

wofür man auch schreiben kann

$$(11^*) \qquad \frac{1}{n}\left\{2\mu_v^2 + \frac{2\mu_a^2}{m} + \frac{2\mu_z^2}{m}\right\} + \left(\frac{[[t_r'] - [t_r]]}{mn}\right)^2.$$

Die Vergleichung von (9) und (11*) lehrt, dass mit wachsendem n der Einfluss von $v\ a\ t_s$ abnimmt, dass aber

v a t_z relativ gleichen Einfluss behalten, wie oft man auch den Winkel messen möge.

Anders ist es mit dem Einfluss des regelmässigen Theilungsfehlers: derselbe bleibt nahezu constant, wenn wir nach jeder Winkelmessung den Kreis um einen oder doch nur wenige Theilstriche drehen, denn alsdann ist für jede Winkelmessung der Werth $\frac{[t_r'] - [t_r]}{m}$ derselbe, also auch das arithmetische Mittel dieser Werthe. Es geht daher $\frac{[[t_r'] - [t_r]]}{mn}$ über in $\frac{[t_r] - [t_r]}{m}$. Richten wir dagegen die n Messungen so ein, dass nach jeder derselben um $\frac{360}{mn}$ Grade gedreht wird, so reducirt sich der Einfluss des Theilungsfehlers im Mittel ganz wesentlich, denn dieses Verfahren hat offenbar dieselbe Wirkung, als würde an mn Mikroskopen auf einmal abgelesen; es verschwinden nämlich in der Summe $\frac{[[t_r'] - [t_r]]}{mn}$ alle Glieder mit Ausnahme derjenigen, welche von dem mn-, $2mn$-, $3mn$- ... fachen der ersten Ablesungen beider Richtungen abhängen.

Hiermit ist es immer selbst bei nur 2 Mikroskopen (Nonien) nicht schwierig, den regelmässigen Theilungsfehler zu eliminiren.

Man wird sich nun mit einer Messung befriedigt erklären, wenn für dieselbe die Unsicherheit im Visiren und die Unsicherheit der Ablesung im weitern Sinne etwa gleich gross sind, d. h. wenn nach (11)

$$\frac{2\mu_v^2}{n} = \frac{2\mu_a^2}{mn} + \frac{2\mu_z^2}{mn} + \left(\frac{[[t_r'] - [t_r]]}{mn}\right)^2. \tag{12}$$

Für grössere Theodoliten ist in der Regel die Unsicherheit im Visiren unter den günstigsten äussern Umständen etwas grösser als die Unsicherheit der Ablesung im engern Sinne:

$$\mu_v^2 > \frac{\mu_a^2}{m} \tag{13}$$

was der Bedingung (12) entspricht. Dagegen ist sehr häufig im Widerspruch damit

$$\frac{\mu_z^2}{m} \geqq \mu_v^2 \tag{14}$$

und durch Vermehrung der Beobachtungsanzahl n dem nicht

abzuhelfen. Hier muss daher ganz anders verfahren werden (vergl. unten II.).

Doch ereignet es sich auch, dass überhaupt der ganze Theilungsfehler sehr klein ist und in diesem Falle kann man sich die Messung erleichtern, indem man nur nach jeder 2. oder 3. . . Messung den Kreis dreht. Drehen wir z. B. nach jeder 3. Messung und schreiben für $n \,..\, 3n'$, so wird das mittlere Fehlerquadrat gleich

$$(15) \qquad \frac{2\mu_v^2}{3n'} + \frac{2\mu_a^2}{3mn'} + \frac{2\mu_z^2}{mn'} + \left(\frac{[[t_r'] - [t_r]]}{mn'}\right)^2$$

worin sich die Summirungen auf die n' Kreisstellungen beziehen. Darnach ist die Bedingung (12) zu modificiren.

Ist aber nur der regelmässige Theilungsfehler sehr klein, so muss nach jeder Messung wenigstens um ein, zwei Theilstriche gedreht werden, womit (15) übergeht in

$$(16) \qquad \frac{2\mu_v^2}{3n'} + \frac{2\mu_a^2}{3mn'} + \frac{2\mu_z^2}{3mn'} + \left(\frac{[[t_r'] - [t_r]]}{mn'}\right)^2.$$

II. Betrachtung des Falles $\frac{\mu_z^2}{m} \geqq \mu_v^2$.

A. Wir trennen hier t_z und t_r nicht mehr und setzen daher für eine einfache Richtungsbeobachtung:

$$(17) \qquad \begin{aligned} &\text{Corr. Ablesg.} = A + v + \frac{[a]}{m} + \frac{[t]}{m} \\ &\text{Corr. Winkel} = W + v' - v + \frac{[a'] - [a]}{m} + \frac{[t'] - [t]}{m}. \end{aligned}$$

Ist für einen grösseren Theodolit zwar die Ablesung im engern Sinne scharf, aber der Theilkreis schlecht getheilt, so können wir uns dadurch helfen, dass wir den Kreis nach jeder Messung drehen, aber gerade so, dass die Theilstriche, welche vorher für's rechtsliegende Object in Anwendung gekommen waren, nun für's linksliegende zur Anwendung gelangen:

Unterscheiden wir die aufeinanderfolgenden Messungen durch Indices 1 2 3 . ., so wird:

1. Messung:

$$(18) \quad \text{Corr. Winkel} = W_1 + v_1' - v_1 + \frac{[a']_1 - [a]_1}{m} + \frac{[t']_1 - [t]}{m}$$

2. Messung:

$$\text{Corr. Winkel} = W_2 + v_2' - v_2 + \frac{[a']_2 - [a]_2}{m} + \frac{[t']_2 - [t']_1}{m}$$

(18) 3. Messung:

$$\text{Corr. Winkel} = W_3 + v_3' - v_3 + \frac{[a']_3 - [a]_3}{m} + \frac{[t']_3 - [t]}{m}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$(n)$$

und im Mittel

$$(19) \quad \text{Corr. Winkel} = W + \frac{[v'] - [v]}{n} + \frac{[[a'] - [a]]}{mn} + \frac{1}{n}\frac{[t']_n - [t']}{m}$$

mit dem mittlern Fehlerquadrate

$$(20) \qquad \frac{2\mu_v^2}{n} + \frac{2\mu_a^2}{mn} + \frac{1}{n^2}\left(\frac{[t']_n - [t']}{m}\right)^2.$$

Es ist ersichtlich, dass das Endresultat für jeden Werth von n immer nur von zwei Theilungsfehlersummen abhängt, nämlich von $\frac{[t]}{m}$ für die erste Einstellung auf das linksliegende Object und von $\frac{[t']_n}{m}$ für die n^{te} Einstellung auf das rechtsliegende Object, und man nimmt daher n so gross, dass annähernd

$$(21) \quad \text{oder} \qquad \frac{2\mu_v^2}{n} = \frac{2\mu_a^2}{mn} + \frac{1}{n^2}\left(\frac{[t']_n - [t']}{m}\right)^2$$

$$2\mu_v^2 - \frac{2\mu_a^2}{m} = \frac{1}{n}\left(\frac{[t']_n - [t']}{m}\right)^2.$$

Diese Methode hat immerhin den Nachtheil gegen die erste Methode, dass sie nur Winkelbeobachtungen zulässt.

Bei den Methoden I. können wir dagegen nicht nur 2 Richtungen zu einer Gruppe verbinden, sondern beliebig viele, denn da die Kreisdrehung ganz unabhängig von der Richtungsdifferenz ist, so gelten die Formeln (10. 11. 15) und (16) für irgend einen der Winkel zwischen zweien der Richtungen.

In der That ist die zuletzt angegebene Methode nur eine Aushülfe, wenn sich wider Erwarten der Theilkreis ungenauer erweist, als er der Grösse und Ausstattung des Instruments nach sein sollte. Der Verlust an Zeit, der dadurch entsteht, dass man nicht mehr Richtungen beobachten kann, sondern einzelne Winkel nehmen muss, ist erheblich. Denn eine genauere Untersuchung, auf die wir nicht weiter eingehen, zeigt, dass das mittlere Fehlerquadrat irgend eines Unterschieds zwischen

den Richtungen nach p Objecten, wenn man alle möglichen Combinationen zu je q beobachtet, aber auf die Mühe von p Visuren reducirt, gleich ist

$$\frac{2q}{q-1} \cdot \frac{p-1}{p} \mu^2$$

worin μ^2 das mittlere Fehlerquadrat einer einfachen Richtungsbeobachtung bedeutet. Wendet man diesen Ausdruck auf $q=2$, (Winkel-) und $q=p$, (vollständige Satz-Beobachtungen) an, so findet sich, dass im Allgemeinen vollständige Satzbeobachtungen etwa 1,4-fache Genauigkeit der Winkelbeobachtungen geben, doch leisten schon vierpunktige Sätze ($q = 4$) ziemlich dasselbe als vollständige Sätze, sodass mit Rücksicht auf andere Gründe, sie letzteren vorzuziehen sind.

B. Es wird der Zeitverlust sehr gemindert, wenn man die Ablesungen auf nur zwei reducirt, nämlich eine für's linksliegende Object am Anfange und eine für's rechtsliegende Object am Ende. Bei grösseren Theodoliten trifft man die dazu nothwendige Einrichtung nicht, weil ja eigentlich der Theilkreis die gehörige Genauigkeit erhalten soll. Man trifft sie aber gern bei kleinen Theodoliten und sie heissen alsdann Repetitionstheodoliten. Von den einfachen unterscheiden sie sich dadurch, dass sie gestatten, den Complex von Alhidade und Theilkreis um eine verticale Axe zu drehen, während die einfachen grösseren Theodoliten nur eine Drehungsfähigkeit für jeden dieser Theile allein für sich haben (die kleinen einfachen Theodoliten lassen überhaupt eine besondere Kreisdrehung nicht zu).

Das Repetitionsverfahren besteht darin, dass zunächst der Winkel einfach gemessen wird, alsdann dreht man den Complex von Alhidade und Theilkreis um die zweite Verticalaxe so, dass das Fernrohr (bei ungeänderter Ablesung) auf das linksliegende Object einsteht. Hierauf dreht man die Alhidade um die erste Axe aufs rechtsliegende Object, liest aber nicht ab, sondern verfährt wie vorher und so fort. Nur nach der n^{ten} (letzten) Winkelmessung lesen wir die Angabe des Kreises ab. Die Differenz der Ablesungen A und B für die erste Visur auf's linksliegende Object und die letzte Visur auf's rechtsliegende Object ist offenbar der $n$fache Winkel.

Derselbe ist behaftet mit 2 Ablesungs-, 2 Theilungs- und 2 n Visurfehlern, also

$$\text{(22)} \quad \text{Corr. Winkel} = \frac{B-A}{n} + \frac{[v']-[v]}{n} + \frac{1}{n}\left(\frac{[a']_n}{m} - \frac{[a]_1}{m}\right) + \frac{1}{n}\left(\frac{[t']_n}{m} - \frac{[t]_1}{m}\right)$$

worin bezeichnen

$[v]$ $[v']$ die Summe der n Visurfehler für jedes Object,

$\frac{[a]_1}{m}$ $\frac{[a']_n}{m}$ die Ablesungsfehler für die erste und letzte aller Visuren,

$\frac{[t]_1}{m}$ $\frac{[t']_n}{m}$ die Theilungsfehler für die erste und letzte aller Visuren.

Da sich der relative Einfluss von Ablesungsfehler und Theilungsfehler mit n nicht ändert, so schreiben wir besser

$$\text{(23)} \quad \text{Corr. Winkel} = \frac{B-A}{n} + \frac{[v']-[v]}{n} + \frac{1}{n}\left(\frac{[b']_n}{m} - \frac{[b]_1}{m}\right)$$

worin $\frac{[b]}{m}$ und $\frac{[b']}{m}$ die Ablesungsfehler im weitern Sinne bedeuten.

Man nimmt die Repetitionszahl so gross, dass der mittlere Betrag des Einflusses von Visur- und Ablesungsfehler im weitern Sinne gleich werden. Das mittlere Fehlerquadrat im Corr. Winkel ist aber

$$\text{(24)} \quad \frac{2\mu_v^2}{n} + \frac{1}{n^2}\left(\frac{[b']_n}{m} - \frac{[b]_1}{m}\right)^2.$$

Man wählt daher n mindestens so gross, dass sehr nahe der Gleichung

$$\text{(25)} \quad \frac{1}{n}\left(\frac{[b']_n}{m} - \frac{[b]_1}{m}\right)^2 = 2\mu_v^2$$

genügt wird und beginnt alsdann, wenn nöthig, eine neue Beobachtungsreihe.

Ist das Instrument noch genügend nivellirt, so kann man aber auch weiter repetiren, sodass

$$\frac{1}{n}\left(\frac{[b']_n}{m} - \frac{[b]_1}{m}\right)^2 < 2\mu_v^2$$

wird. Jedoch pflegt man von Zeit zu Zeit abzulesen, um einestheils für alle Vorkommnisse, etwa eines plötzlichen Stosses an das Instrument, gesichert zu sein, und andern-

theils die mittlern Ablesungen mit zur Controlle und zur Erhöhung der Genauigkeit des Gesammtresultats zu verwenden. (Bessel hat zu der für letztern Zweck nöthigen Rechnung allgemeine Formeln entwickelt in den Astron. Nachr.)

Bestehen die Vortheile des Repetitionsverfahrens darin, dass man mit kleinen leicht transportablen Instrumenten, die aber ein kräftiges Fernrohr besitzen, Winkel sehr genau messen kann, so hat man einestheils doch in dem Falle, dass das Instrument die Anwendung der Methoden I. gestattet, im Allgemeinen immer noch Zeitverlust und die Erfahrung hat auch gelehrt, dass letztere allein geeignet sind, die höchste Schärfe in den Endwerthen der Winkelmessung zu erreichen. Das Repetitionsverfahren involvirt nämlich neue Fehlerursachen, wozu namentlich unvollständiger Parallelismus der beiden verticalen Drehaxen, sowie kleine Verrückungen der Alhidade gegen den Theilkreis bei der Drehung um die zweite Verticalaxe gehören. Diese Fehlerursachen wirken in der Regel immer in demselben Sinne und es findet also keine Compensation statt; die Grösse von n hat daher einen Einfluss auf die Verminderung des dadurch entstehenden Fehlers nicht. Selbst für $n = \infty$, wo alle andern Fehlereinflüsse im Mittel verschwinden und die andern Methoden verschwindende mittlere Fehler ergeben, verschwindet der Einfluss der letzterwähnten Fehlerursachen nicht.

Immerhin ist das Repetitionsverfahren in vielen Fällen von grossem Nutzen wegen der Billigkeit und leichten Transportabilität kleiner Repetitionstheodoliten.

C. Werden mit demselben Theodolit verschiedene Repetitionsbeobachtungen vorgenommen und ist jede der Repetitionszahlen gross genug, um den Ablesungsfehler im weitern Sinne unmerklich zu machen, so kann man näherungsweise die Genauigkeiten der Beobachtungen proportional den Quadratwurzeln aus den Repetitionszahlen setzen, weil die Quadrate der mittlern Winkelfehler alsdann vorzugsweise von $\frac{2\mu_v^2}{n}$ abhängen. (Beisp. 2.)

Sind dagegen die Repetitionszahlen klein, sodass der Ablesungsfehler i. w. S. vorherrscht, so hat man

die Genauigkeiten proportional den Repetitionszahlen selbst anzunehmen.

III. Kleine einfache Theodoliten haben in der Regel viel kräftigere Fernröhre und in Folge dessen einen viel kleinern mittlern Visurfehler, als man nach der Ablesungsunsicherheit erwarten sollte. Aber selbstverständlich liegt darin kein Nachtheil, denn das kräftigere Rohr lässt sich ohne erhebliche Kostenvermehrung erlangen und bietet entsprechende Annehmlichkeit (rascheres Visiren), ohne dass zugleich das Instrument an Transportabilitätsleichtigkeit verlöre. Da sich die Kreise dieser Instrumente nicht drehen lassen, so ist ohne Verdrehung des ganzen Instruments sammt Dreifuss eine Theilungsfehlerelimination nicht möglich. Kann man nun in der Regel annehmen, dass der Ablesungsfehler im engern Sinne grösser als der Theilungsfehler ist, so werden Winkelmessungen mit verschiedenen kleinen Theodoliten dieser Art sich bezüglich ihrer Genauigkeiten sehr nahe umgekehrt verhalten wie die mittlern Ablesefehler, weil gegen diese der Einfluss der übrigen Fehler als unbeträchtlich anzusehen ist. In Ermangelung genauerer Kenntniss des mittlern Ablesefehlers kann man (falls die Anzahl der Nonien in allen Fällen die gleiche ist) auch die wahre Noniusangabe setzen.

Unter letzterer Bezeichnung verstehen wir zum Unterschied von der nominellen Angabe dasjenige Bruchtheil von dieser, welches noch erkennbar ist — also vielleicht die Noniusangabe selbst, oder $\frac{1}{2}$ oder auch $\frac{1}{4}$ derselben.

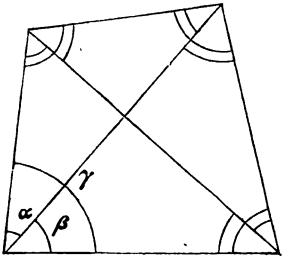
Ergaben sich z. B. die Werthe W_1 W_2 für einen Winkel mit Hülfe von Theodoliten mit je 2 Nonien von 30 und 20 Secunden nomineller Noniusangabe, konnte man aber auf ersterem noch 15″ unterscheiden, so ist der plausibelste Werth, da sich die Genauigkeiten wie $\frac{1}{15} : \frac{1}{20}$ oder wie 4 : 3 verhalten:

$$W = \frac{16\,W_1 + 9\,W_2}{16 + 9}. \tag{26}$$

Beispiel 26. Ausgleichung eines trigonometrischen Netzes.

I. Die directe Form, unter welcher sich das Ausgleichungsproblem eines Dreiecksnetzes mit beliebig vielen Grundlinien darbietet, ist diejenige vermittelnder Beobach-

tungen mit Bedingungsgleichungen. Zerspaltet man die Rechnung in Stationsausgleichungen und eine Netzausgleichung, so hat man entweder einen Rechnungsgang wie in den Beisp. 18, 2 und 9, wenn man Winkel als Unbekannte einführt, oder den etwas verschiedenen Rechnungsgang nach Hansen, wenn man Richtungen als Unbekannte einführt (Beisp. 9 und 12). Die Zerspaltung ist dabei der Uebersichtlichkeit wegen wenigstens für grössere Netze geboten. Werden jedoch nur zweipunktige Sätze d. i. Winkel gemessen, aber nur wenige überschüssige auf jeder Station, so ist es bequemer, alle Messungen zusammen als Ganzes auszugleichen und zwar nach bedingten Beobachtungen. Sind z. B. in beistehendem Vierecke auf jeder Station zwischen den



3 Stationen alle 3 Winkel mit gleicher Genauigkeit gemessen, so geben die Stationsmessungen 4 Bedingungsgleichungen der Form

(1) $\alpha + \beta + \gamma = 0$

zu denen die 4 Netzbedingungsgleichungen hinzutreten. Die Gesammtzahl der Gleichungen ist 8, jedoch haben sie, die Seitenbedingungsgleichung ausgenommen, eine sehr einfache Form und die Correlatengleichungen und Normálgleichungen werden daher auch einfach; insbesondere macht, wie jedes Beispiel zeigt, die Elimination der zu den Winkelgleichungen gehörenden Correlaten sehr wenig Arbeit, so dass man als Maassstab der aufzuwendenden Mühe näherungsweise die Summe der Anzahlen der Seitengleichungen und der Stationsbedingungsgleichungen ansehen kann. Auch thut man wohl in der Ausgleichung von Anfang an die Winkelgleichungen voranzustellen.

(Dieses Verfahren wird in der Geodäsie von Fischer als Schleiermacher's Methode aufgeführt.)

Wir beschäftigen uns nunmehr mit der Ermittlung der Anzahl der Netzbedingungsgleichungen. Sei M die Anzahl aller im Dreiecksnetze beobachteten Richtungen, wobei die gegenseitig beobachteten selbstverständlich doppelt zu zählen sind; sei ferner N die Anzahl aller

Netzpunkte, von denen aber F nur Fixpunkte, also keine Standpunkte sind, so ist zuerst zu bedenken, dass auf jeden der $N - F$ Standpunkte die erste Richtung allein werthlos ist, dagegen jede fernere einen Winkel bestimmt. Die Anzahl dieser Winkel ist mithin $M-(N-F)$. Von irgend zwei Standpunkten aus bestimmen zwei dieser Winkel einen neuen Netzpunkt, wir bedürfen daher zur Construction aller Netzpunkte aus 2 gegebenen $2(N-2)$ jener Winkel und haben mithin $M - N + F - 2(N-2)$ d. i.

$$M - 3N + F + 4 \tag{2}$$

überschüssige Messungen und mithin ebensoviele Netzbedingungsgleichungen.

Diese zerfallen in Winkelgleichungen und Seitengleichungen. Erstere beziehen sich auf die Winkelsumme eines Dreiecks, Vierecks . . Polygons, deren theoretischer Werth bekannt ist; alle übrigen Gleichungen, die aus den Winkelbeobachtungen resultiren, sind Seitengleichungen. Die Winkelbedingungsgleichungen nennt man auch Bedingungsgleichungen 2. Classe, die Seitenbedingungsgleichungen solche 3. Classe zum Unterschiede von den Bedingungsgleichungen 1. Classe, als welche zwischen den Messungen auf jeder Station einzeln stattfinden.

Ist q die Anzahl der gegenseitig beobachteten Richtungen, r die der einseitig beobachteten Richtungen, so ist

$$2q + r = M. \tag{3}$$

Von zwei gegenseitig beobachteten Standpunkten aus construiren wir einen dritten mit Hülfe zweier neuen gegenseitig beobachteten Richtungen u. s. f. Die Anzahl der von zwei ersten Standpunkten aus zu construirenden Standpunkte ist $N - F - 2$, die Anzahl der dazu nöthigen gegenseitigen Richtungen $2(N - F - 2)$. Eine erste gegenseitige Richtung war überdies nöthig zur Verbindung der ersten beiden Punkte, wir haben daher $2(N - F - 2) + 1$ zur Construction nothwendige gegenseitige Richtungen, oder $q - 2(N - F - 2) - 1$ d. i. $q - 2(N - F) + 3$ überschüssige gegenseitige Richtungen.

Da nun jeder der $N - F - 2$ construirten Standpunkte durch ein aus 3 gegenseitig beobachteten Richtungen gebil-

detes Dreieck bestimmt ist, so giebt jedes dieser Dreiecke schon eine Winkelgleichung, zusammen deren $N - F - 2$. Jede überschüssige gegenseitige Richtung giebt ein neues Dreieck und eine weitere Winkelgleichung, zusammen $q - 2(N - F) + 3$; daher hat man Winkelgleichungen

$$q - (N - F) + 1. \tag{4}$$

Die Anzahl der Seitengleichungen ist mithin

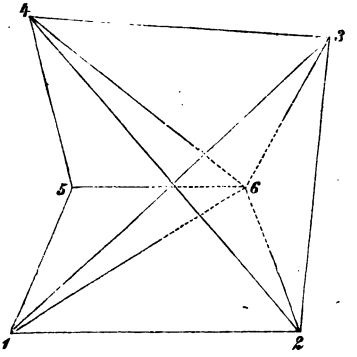
$$(M - 3N + F + 4) - (q - (N - F) + 1) \text{ d. i.}$$

$$q + r - 2N + 3. \tag{5}$$

Man hat z. B. in einem Netz aus:

(6)

N Netzpunkten	F Fixpunkten	$N-F$ Standpunkten	q Gegenseitige Richtungen	r Einseitige Richtungen	$q-(N-F)+1$ Winkelgleich.	$q+r-2N+3$ Seitengleich.	Netzbedingungsgleichungen
3	.	3	3	.	1	.	1
4	1	3	3	3	1	1	2
4	.	4	6	.	3	1	4
5	1	4	6	4	3	3	6
6	1	5	7	5	3	3	6



Figur zum letzten Falle:

6 ist Fixpunkt
1...5 sind Standpunkte.

Bei der Aufstellung der Bedingungsgleichungen des Netzes zerlegt man dasselbe in einfache Figuren und erzielt damit zugleich möglichst einfache Form der Bedingungsgleichungen: theoretisch betrachtet kommt allerdings auf die grössere oder geringere Complicirung derselben nichts an, denn erfüllen die Winkel irgend ein vollständiges System Bedingungsgleichungen, so erfüllen sie alle möglichen; aber praktisch bequem sind diejenigen mit den wenigsten Gliedern.

Daher nimmt man als Winkelgleichungen meist Dreiecke; in letztem Beispiele können wir es aber nicht vermeiden, auch ein Viereck zu benutzen:

Beginnen wir bei 1.2 und fügen 3 hinzu, so haben wir ein Dreieck 1.2.3 mit einer Winkelgleichung; Dreieck 2.3.4 giebt eine weitere solche. Für das Viereck 1.2.3.4 sind damit alle Netzgleichungen aufgestellt, da es deren ($N = 4$ $F = 0$ $q = 5$ $r = 0$) nur 2 hat. Der Punkt 5 giebt mit keinem der Standpunkte ein gegenseitig beobachtetes Dreieck, da er aber gleichwohl eine Winkelgleichung liefert, (weil für $N = 5$ $F = 0$ $q = 7$ $r = 0$ die Anzahl der Winkelgleichungen 3 ist), so muss dieselbe aus der Winkelsumme des Vierecks 1.2.4.5 entnommen werden. Dagegen giebt die Figur 1.2.3.4.5 noch keine Seitengleichung; diese entspringen erst durch Hinzunahme des Fixpunktes 6.

Eine erste Seitengleichung giebt das Dreieck 1.2.3 mit 6, eine zweite das Dreieck 2.3.4 mit 6. Die dritte kann nicht so leicht aufgestellt werden, weil es kein vollständiges Dreieck weiter giebt; wir nehmen daher die nächste einfache Figur, nämlich das Viereck 1.2.4.5 zu 6.

Die Aufstellung der Seitengleichungen erfolgt wie Beispiel 12. immer durch Doppelrechnung einer Seite aus einer andern. Für das Viereck 1.2.4.5 mit 6 hat man z. B. zur Doppelrechnung von 6.2 aus 5.6 einerseits die Drr. 6.2.4, 4.6.5, andrerseits die Drr. 5.6.1, 1.6.2 zu benutzen. Schematisch drückten wir dies, wie gewöhnlich geschieht, durch die Identität

$$\frac{6.2}{4.6}\,\frac{4.6}{6.5}\,\frac{5.6}{6.1}\,\frac{1.6}{6.2} = 1 \tag{7}$$

aus, welche in die Bedingungsgleichung übergeht, wenn man die Seitenverhältnisse durch die Sinusverhältnisse der Gegenwinkel derselben Dreiecke ersetzt u. s. f.

Werden die Seitengleichungen wie hier aus Systemen von Dreiecken entwickelt, die eine gemeinsame Spitze haben, so nennt man diese Netztheile Centralsysteme; 1.2.3.6; 2.3.4.6; 1.2.4.5.6 sind dergleichen. Die Centralsysteme geben die bequemste Aufstellung der Seitengleichungen; man ist aber zuweilen doch gezwungen, eine Controlle durch complicirtere Formen zu erzeugen, von denen wir nur die Diagonalsysteme nennen: Bildet man eine Kette von z. B. 4 Dreiecken: 1.2.3, 2.3.4, 3.4.5, 4.5.6, und beobachtet auch die Richtung 1.6, sonst aber nur die Dreieckswinkel jedes der vier Dreiecke, so giebt dies ein Netz mit nur einer Seitengleichung, die aus einem sogen. Diagonalsystem zu entwickeln ist.

II. Sind mehrere, G, Grundlinien gemessen und sollen sie genau dargestellt werden, so giebt dies Veranlassung zu $(G-1)$ Bedingungsgleichungen, die man erhält, wenn man je 2 beobachtete Grundlinien durch den zwischenliegenden Netztheil berechnet.

Kennt man aber den mittlern Fehler der Basismessung und den mittlern Fehler der Winkelmessung wenigstens soweit angenähert richtig, dass man ihr Verhältniss zu schätzen vermag, so kann man (ähnlich wie in Beisp. 11.) mit Rücksicht darauf die Ausgleichung so vornehmen, dass alle Grundlinien kleine Verbesserungen erhalten. In der Regel sind indessen die Grundlinien so scharf gemessen, dass man sie im Vergleiche zu den aus den Winkelmessungen hervorgehenden Fehlern der Form des Netzes als genau richtig betrachten kann.

Wird nach vollendeter Netzausgleichung noch eine Basis gemessen, so ergiebt sich damit die Aufgabe, die dieser Messung entsprechende Bedingungsgleichung zu befriedigen. Zur Erläuterung gehen wir auf §. 23. zurück und nehmen an, es seien zuerst die beiden ersten Bedingungsgleichungen befriedigt worden und nun noch die dritte zu erfüllen. Die Erfüllung der beiden ersten allein giebt für $k_1\ k_2$ Werthe $k_1'\ k_2'$, wofür

$$(8)\qquad \begin{aligned}(pp)k_1' + (pq)k_2' + w_1 &= 0\\ (pq)k_1' + (qq)k_2' + w_2 &= 0.\end{aligned}$$

Sind nun k_1'' k_2'' die Verbesserungen dieser Werthe, so sind diese zu bestimmen aus dem Systeme

$$(9)\quad \begin{aligned} (pp)k_1'' + (pq)k_2'' + (pr)k_3 \quad . \quad &= 0 \\ (pq)k_1'' + (qq)k_2'' + (qr)k_3 \quad . \quad &= 0 \\ (pr)k_1'' + (qr)k_2'' + (rr)k_3 + w_3' &= 0 \end{aligned}$$

welches aus der Subtraction des vorigen Systems von §. 23. (4) hervorgeht und wofür w_3' auch als Widerspruch der neuen Bedingungsgl. bei Einführung der nach dem 1. Theile der Ausgleichung verbesserten Beobachtungswerthe berechnet werden kann. Das System (9) ist mittelst der Auflösung von (8) bequem aufzulösen.

III. Die Ausgleichung eines Dreiecksnetzes muss nicht nothwendig nach bedingten Beobachtungen geschehen. Sie kann auch nach vermittelnden Beobachtungen erfolgen, wobei man als Unbekannte die gehörige Anzahl zur Construction des Netzes nothwendiger Bestimmungsstücke einzuführen hat; geht man also von 2 gegebenen Punkten aus, so würden es für jeden der $(N-2)$ folgenden Punkte 2 Winkel, oder 1 Winkel und 1 Seite sein müssen, welche letztere, wenn sie für alle $(N-2)$ Punkte sich auf einen der beiden ersten Punkte als Anfangspunkt und die Verbindungslinie der beiden ersten Punkte als Anfangsrichtung beziehen, ein System Polarcoordinaten bilden. In der Regel ist jedoch dieses Verfahren sehr umständlich, nicht nur der schwierigen Aufstellung der Fehlergleichungen wegen (denn jeder gemessene Richtungsunterschied muss als Function der Unbekannten dargestellt werden), sondern auch der grössern Anzahl Normalgleichungen wegen, welche im Zusammenhange aufgelöst werden müssen. Sie beträgt $2(N-2)$, welche Zahl in der Regel weit grösser ist, als die Anzahl der Netzbedingungsgleichungen. (Die Ausgleichung mit Hülfe von Polarcoordinaten hat Verf. in Schlömilch's Journal f. Math. u. Phys. Band 14. pag. 174 behandelt.)

IV. Bei grossen Vermessungen bleibt wegen der in die Hunderte anschwellenden Anzahl von Netzbedingungsgleichungen nichts übrig, als das Netz in Theile einzutheilen; man gleicht einen ersten solchen Theil aus, alsdann einen

zweiten anschliessenden, wobei die Ergebnisse des ersten Theiles für die Anschlussfigur beibehalten werden, u. s. f. Man erreicht damit allerdings kein Minimum der Fehlerquadrate, aber doch ein System verbesserter Beobachtungswerthe, welche die Bedingungen des Netzes erfüllen, und ohne Zweifel einen höhern Grad von Zuverlässigkeit besitzen, als die rohen Beobachtungswerthe.

V. Gauss hat anstatt dieses Verfahrens in dem Supplement zur Theoria combinat. observ. ein Annäherungsverfahren mitgetheilt, welches auf der sogen. unvollständigen Ausgleichung beruht (vergl. auch Gerling, Ausgleichungsrechnung pag. 394), und welches von ihm mit Vortheil zur Bewältigung zahlreicher Bedingungsgleichungen angewandt worden ist.

Berechnet man nämlich mit irgend welchen Werthen, anstatt der richtigen Werthe der Correlaten k nach den Gl. (3) §. 23. die λ, so werden diese die Bedingungsgleichungen nicht erfüllen; wenn es aber gelingt, auf irgend eine Weise ein Werthsystem zu ermitteln, womit sich Werthe λ berechnen, die die Bedingungsgleichungen erfüllen, so sind dies die richtigen k, welche auch die Normalgleichungen erfüllen, denn in §. 23. gehen ja die Gl. (4) aus den (2) durch Substitution der (3) hervor. Haben wir nun mit Näherungswerthen der k Werthe für die λ berechnet und alsdann damit die Widerspruchsreste der Bedingungsgleichungen, so berechnen wir weiter aus Verbesserungen der k Verbesserungen der λ und die neuen Widerspruchsreste und so fort. Aus der einfachen Form der Gl. (2) und (3) §. 23. ersieht man leicht, dass dieses Verfahren zu den richtigen Werthen der λ führen muss und wenn erst einmal alle Bedingungsgleichungen erfüllt sind, so erhält man irgend ein λ durch Addition aller successiven Verbesserungen zu dem Anfangswerthe, sowie auch den Endwerth irgend eines der k in derselben Weise.

Um nun zu Näherungswerthen und Verbesserungen der k zu gelangen, verfahren wir im Princip wie §. 18. bei der indirecten Auflösung, vermeiden aber die vollständige Bildung der Normalgleichungen: Wir stellen zuerst alle Bedingungsgleichungen auf und zerlegen sie in 2 oder mehrere

Gruppen, sodass jede Gruppe hauptsächlich einen Netztheil betrifft. Wir bilden nun für jede Gruppe die Correlaten- und Normalgleichungen, gleichen alsdann die 1. Gruppe aus und führen die erhaltenen Verbesserungen in die zweite ein; gleichen nun die 2. Gruppe aus und führen die bereits erhaltenen Verbesserungen in die 3. Gruppe ein u. s. f. Sind alle Gruppen durchgenommen, so beginnt die Rechnung von vorn bei der 1. Gruppe.

Beispielsweise nehmen wir den einfachen Fall dreier Bedingungsgleichungen §. 23. und vereinigen die beiden ersten Gleichungen zu einer Gruppe, die 3. Gleichung bildet die andere Gruppe.

(12) 1. Gruppe $[p\lambda] + w_1 = 0 \quad [q\lambda] + w_2 = 0$
2. „ $[r\lambda] + w_3 = 0.$

a. Auflösung von

$$(13) \qquad \begin{aligned} (pp)k_1' + (pq)k_2' + w_1 &= 0 \\ (pq)k_1' + (qq)k_2' + w_2 &= 0. \end{aligned}$$

Berechnung der Werthe

$$(14) \qquad \lambda_i' g_i = k_1' p_i + k_2' q_i \quad i = 1 \ldots n.$$

Berechnung von

$$(15) \qquad w_3' = [r\lambda'] + w_3.$$

b. Auflösung von

$$(16) \qquad (rr)k_3'' + w_3' = 0.$$

Berechnung der Werthe

$$(17) \qquad \lambda_i'' g_i = k_3'' r_i \quad i = 1 \ldots n.$$

Berechnung von

$$(18) \qquad w_1'' = [p\lambda''] \quad w_2'' = [q\lambda''].$$

c. Auflösung von

$$(13^*) \qquad \begin{aligned} (pp)k_1''' + (pq)k_2''' + w_1'' &= 0 \\ (pq)k_1''' + (qq)k_2''' + w_2'' &= 0. \end{aligned}$$

Berechnung der Werthe

$$(14^*) \qquad \lambda_i''' g_i = k_1''' p_i + k_2''' q_i \quad i = 1 \ldots n.$$

Berechnung von

(15*) $$w_3''' = [r\lambda''']$$

u. s. f.

Sei nun w_3''' hinreichend gleich Null, so ist leicht zu zeigen, dass die Werthe

(19) $$\lambda_i = \lambda_i' + \lambda_i'' + \lambda_i'''$$

die strengen Verbesserungen sind. Es ist nämlich aus der letzten Gleichung durch Werthseinsetzung:

(20) $$\lambda_i g_i = (k_1' + k_1''')p_i + (k_2' + k_2''')q_i + k_3'' r_i$$

und sind daher die Gesammtwerthe λ zu betrachten, als aus Correlatengleichungen der Form (3) §. 23. hervorgegangen. Da sie aber auch die Bedingungsgleichungen erfüllen, so sind sie, wie oben bemerkt wurde, die strengen Endwerthe.

Man beachte, dass die Verfahren IV. und V. darin wesentlich verschieden sind, dass in IV. die einmal verbesserten Beobachtungswerthe eines abgeschlossenen Netztheiles nicht weiter verbessert, in V. dagegen immer neue Verbesserungen zu den bereits vorhandenen hinzugefügt werden, wodurch eben anfangs die Erfüllung der vorhergehenden Bedingungsgleichungen immer wieder aufgehoben wird.

VI. Wesentliche Vereinfachung kann man dadurch erzielen, dass die Beobachtungen auf den Stationen so eingerichtet werden, dass die Stationsausgleichung wegfällt oder doch nach dem Beisp. 9. mitgetheilten Annäherungsverfahren mit ausreichender Schärfe ausgeführt werden kann: Auf eine genaue Berechnung der Gewichte zufolge der Stationsausgleichung kommt es nämlich in allen den Fällen nicht an, wo sich die Widersprüche der Netzbedingungsgleichungen erheblich grösser ergeben, als nach den mittlern Fehlern der Stationsausgleichung zu erwarten ist. Ja es würde dann geradezu fehlerhaft sein, nach Art von Beisp. 18. vorzugehen. Denn die unerwartet grossen Widersprüche im Netze können ihre Ursache nur in regelmässigen Fehlern (Lateralrefractionen, Centrirungsfehlern des Theodoliten und der Signale, Theilungsfehlerresten u. A. m.) haben, welche bei den Stationsausgleichungen nicht zu bemerken waren, aber deren Resultaten anhaften und deren Betrag im Allgemeinen unabhängig davon ist, wie viele Male eine Richtung beobachtet worden ist.

(Vergl. hierüber auch Beisp. 18. S. 253.)

Beispiel 27. Bestimmung von Theilungsfehlern einer Scale, insbesondere für einen Theilkreis am Aequatoreale der Hamburger Sternwarte.

I. Um die Theilungsfehler einer Scale relativ gegen die nominelle ganze Länge derselben zu bestimmen, trägt man auf derselben vom Anfangspunkt aus eine Hülfslänge ab, die nahezu ein aliquoter Theil der ganzen Länge ist. Sei die Hülfslänge gleich $h + u$, wo $h = \frac{L}{n}$, wenn L die ganze nominelle Länge und n einen Theiler von L bedeuten. Nennen wir ferner die hier in Betracht kommenden und in dem Intervall h sich folgenden Theilstriche: $t_0\ t_1\ t_2 \ldots t_{n-1}\ t_n$ und bezeichnen deren Verbesserungen zu den nominellen Angaben mit (0) (1) (2) . . . (n — 1) (n), so werden wir erhalten:

1) wenn die Hülfslänge bei t_0 beginnt und sehr nahe bei t_1 in der Ablesung $t_1 + l_1$ endigt:

$$(1) \qquad h + u = (t_1 + (1) + l_1) - (t_0 + (0))$$

2) wenn die Hülfslänge bei t_1 beginnt und sehr nahe bei t_2 in der Ablesung $t_2 + l_2$ endigt:

$$(2) \qquad h + u = (t_2 + (2) + l_2) - (t_1 + (1))$$

u. s. f.

Wegen der unvermeidlichen Fehler beim Einstellen und Ablesen sind jedoch die rechten Seiten nicht genau gleich den linken, sondern werden es erst, wenn rechts Verbesserungen $\lambda_1\ \lambda_2 \ldots$ beigefügt werden. Das giebt, wenn man noch bedenkt, dass die (nominellen) Angaben $t_1 - t_0$, $t_2 - t_1$, . . . gerade gleich h sind:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + u + (0) - (1) \\ \lambda_2 &= -l_2 + u + (1) - (2) \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \lambda_n &= -l_n + u + (n-1) - (n) \end{aligned}$$

und da wir für Anfang- und Endstrich keinen Fehler voraussetzen, ist für (0) und (n) Null einzuführen.

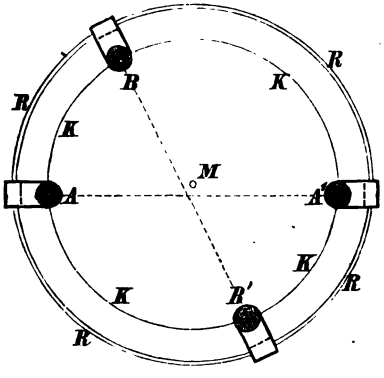
Um die während der Dauer der Beobachtungsreihe eintretende kleine Veränderung der Hülfslänge $h + u$ zu eliminiren, verbindet man stets zwei sich unmittelbar folgende Reihen mit entgegengesetzter Anordnung der einzelnen Vergleichungen. (Vergl. Beisp. 5.)

Die Anzahl der Unbekannten, (1) . . . $(n-1)$ und u, ist gleich n, der Anzahl der Gleichungen und man muss daher die λ Null setzen, um die Unbekannten zu bestimmen, falls andere Beobachtungen nicht hinzutreten. Dies wird jedoch der Fall sein; man wird noch andere Hülfslängen h auftragen und da die einzelnen Beobachtungsreihen theilweise dieselben Striche berühren, so giebt dies Controllen und also auch eine Ausgleichung.

Ist die Scale z. B. 100theilig, so wird man setzen

$$h = \frac{L}{2}, \frac{L}{4}, \frac{L}{5}, \frac{L}{10}, \frac{L}{20}, \frac{L}{25}, \frac{L}{50}, \frac{L}{100}.$$

II. Ist die Scale ein getheilter Vollkreis, so fallen der erste und letzte Theilstrich, 0 und 360, in eins zusammen und die relativen Theilungsfehler gehen in absolute Fehler über. Die Hülfslängen h werden dargestellt mit Hülfe zweier Mikroskoppaare. Sei in der Figur KK der Vollkreis, drehbar um den Zapfen M, welcher letztere in fester Verbindung mit einem Rahmen RR steht, auf welchem die Mikroskoppaare AA' BB' aufgeschraubt sind, so ist $h + u$ der Winkel zwischen den Linien AA' BB', h selbst gleich 120°, 90°, u. s. f. zu nehmen. Die Anwendung von 2 Paaren diametraler Mikroskope ist dadurch gefordert, dass es nicht möglich ist, den Kreis genau centrisch zu seiner Drehaxe M anzubringen; der dadurch entstehende Excentricitätsfehler wird aber im Mittel aus Ablesungen diametraler Mikroskope eliminirt. Andrerseits hat dies die Folge, dass wir nicht die einzelnen Theilungsfehler selbst, sondern nur deren



Mittelwerth für je zwei diametrale Striche erhalten, was jedoch nichts zu bedeuten hat, sobald die Winkelmessung wieder mit 2 diametralen Mikroskopen erfolgt, was stets der Fall ist.

Wir betrachten beispielsweise die Bestimmung einiger Theilungsfehler im Declinationskreise des Hamburger Aequatoreals, angestellt vom Observator Kampf (Altona bei Esch 1868). Die Mikroskope hatten (nach Einsicht der Originalbeobachtungen) nahezu 120^0, 135^0, 150^0, 165^0 Abstand, welche Werthe, wenn nicht von 360^0, so doch von Vielfachen von 360^0 aliquote Theile sind. Auch wurde der Kreis nach erfolgter Ablesung nicht um das ganze Intervall 120, 135 ... gedreht, sondern jedes Mal um 15^0.

Wir bezeichnen nun die arithmetischen Mittel der Theilungsfehler für

(4)

0	und	180	Grad mit	(0)
15	„	195	„ „	(1)
30	„	210	„ „	(2)
.		.	. .	.
165	„	345	„ „	(11).

Alsdann gestalten sich die Fehlergleichungen wie folgt:

(5)

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= +2.12 + u + (0) - (8)\\
\lambda_2 &= +2.42 + u + (1) - (9)\\
\lambda_3 &= +1.29 + u + (2) - (10)\\
\lambda_4 &= -0.26 + u + (3) - (11)\\
\lambda_5 &= -0.79 + u + (4) - (0)\\
\lambda_6 &= -3.15 + u + (5) - (1)\\
\lambda_7 &= -2.62 + u + (6) - (2)\\
\lambda_8 &= -1.18 + u + (7) - (3)\\
\lambda_9 &= -0.75 + u + (8) - (4)\\
\lambda_{10} &= +0.50 + u + (9) - (5)\\
\lambda_{11} &= +0.75 + u + (10) - (6)\\
\lambda_{12} &= +1.66 + u + (11) - (7)
\end{aligned}$$

Mittel aus 2 Doppelreihen bei 120^0 Abstand der Mikroskope.

(6)

$$\begin{aligned}
\lambda_1' &= +1.82 + u' + (0) - (9)\\
\lambda_2' &= +1.80 + u' + (1) - (10)\\
\lambda_3' &= +0.62 + u' + (2) - (11)\\
\lambda_4' &= -0.66 + u' + (3) - (0)\\
\lambda_5' &= -1.89 + u' + (4) - (1)\\
\lambda_6' &= -2.33 + u' + (5) - (2)\\
\lambda_7' &= -1.47 + u' + (6) - (3)\\
\lambda_8' &= -0.83 + u' + (7) - (4)\\
\lambda_9' &= +0.02 + u' + (8) - (5)\\
\lambda_{10}' &= +0.36 + u' + (9) - (6)\\
\lambda_{11}' &= +0.90 + u' + (10) - (7)\\
\lambda_{12}' &= +1.67 + u' + (11) - (8)
\end{aligned}$$

Mittel aus 2 Doppelreihen bei 135° Abstand der Mikroskope.

(7)

$$\begin{aligned}
\lambda_1'' &= +1.38 + u'' + (0) - (10)\\
\lambda_2'' &= +1.02 + u'' + (1) - (11)\\
\lambda_3'' &= +0.69 + u'' + (2) - (0)\\
\lambda_4'' &= -1.43 + u'' + (3) - (1)\\
\lambda_5'' &= -1.43 + u'' + (4) - (2)\\
\lambda_6'' &= -1.86 + u'' + (5) - (3)\\
\lambda_7'' &= -0.94 + u'' + (6) - (4)\\
\lambda_8'' &= +0.58 + u'' + (7) - (5)\\
\lambda_9'' &= +0.52 + u'' + (8) - (6)\\
\lambda_{10}'' &= -0.04 + u'' + (9) - (7)\\
\lambda_{11}'' &= +0.56 + u'' + (10) - (8)\\
\lambda_{12}'' &= +0.97 + u'' + (11) - (9)
\end{aligned}$$

Mittel aus 2 Doppelreihen bei 150° Abstand der Mikroskope.

(8)

$$\begin{aligned}
\lambda_1''' &= +0.19 + u''' + (0) - (11)\\
\lambda_2''' &= +0.31 + u''' + (1) - (0)\\
\lambda_3''' &= -0.51 + u''' + (2) - (1)\\
\lambda_4''' &= -1.03 + u''' + (3) - (2)\\
\lambda_5''' &= -0.18 + u''' + (4) - (3)\\
\lambda_6''' &= -0.50 + u''' + (5) - (4)\\
\lambda_7''' &= +0.17 + u''' + (6) - (5)\\
\lambda_8''' &= -0.05 + u''' + (7) - (6)\\
\lambda_9''' &= +0.04 + u''' + (8) - (7)\\
\lambda_{10}''' &= +0.36 + u''' + (9) - (8)\\
\lambda_{11}''' &= +0.68 + u''' + (10) - (9)\\
\lambda_{12}''' &= +0.51 + u''' + (11) - (10)
\end{aligned}$$

Mittel aus 2 Doppelreihen bei 165° Abstand der Mikroskope.

In diesen Fehlergleichungen sind für $u\ u'\ u''\ u'''$ schon solche Näherungswerthe eingeführt, dass die Summe der (so umgeänderten) Beobachtungszahlen l gerade Null wird und es bedeuten daher $u\ u'\ u''\ u'''$ in den Fehlergleichungen nunmehr die weitern Verbesserungen der Näherungswerthe. Setzen wir ferner, anstatt die Verbesserung (0) gleich Null zu nehmen,

$$(9) \qquad (0) + (1) + (2) + \ldots + (10) + (11) = 0$$

so wird alsdann, wie die Bildung der Normalgleichungen für die u zeigt, jeder dieser Werthe Null. Das Normalgleichungssystem im engern Sinne ergiebt sich damit wie folgt:

(10)

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrr}
8(0)- & (1)- & (2)- & (3)- & (4) & . & . & . - & (8)- & (9)- & (10)- & (11)+k = & -5.96 \\
-(0)+8(1)- & (2)- & (3)- & (4)- & (5) & . & . & . - & (9)- & (10)- & (11)+k = & -12.53 \\
-(0)- & (1)+8(2)- & (3)- & (4)- & (5)- & (6) & . & . & . - & (10)- & (11)+k = & -9.50 \\
-(0)- & (1)- & (2)+8(3)- & (4)- & (5)- & (6)- & (7) & . & . & . - & (11)+k = & -1.31 \\
-(0)- & (1)- & (2)- & (3)+8(4)- & (5)- & (6)- & (7)- & (8) & . & . & . +k = & +1.27 \\
. - & (1)- & (2)- & (3)- & (4)+8(5)- & (6)- & (7)- & (8)- & (9) & . & . +k = & +9.11 \\
. & . - & (2)- & (3)- & (4)- & (5)+8(6)- & (7)- & (8)- & (9)- & (10) & . +k = & +6.44 \\
. & . & . - & (3)- & (4)- & (5)- & (6)+8(7)- & (8)- & (9)- & (10)- & (11)+k = & +4.04 \\
-(0) & . & . & . - & (4)- & (5)- & (6)- & (7)+8(8)- & (9)- & (10)- & (11)+k = & +4.88 \\
-(0)- & (1) & . & . & . - & (5)- & (6)- & (7)- & (8)+8(9)- & (10)- & (11)+k = & +4.71 \\
-(0)- & (1)- & (2) & . & . & . - & (6)- & (7)- & (8)- & (9)+8(10)- & (11)+k = & +2.09 \\
-(0)- & (1)- & (2)- & (3) & . & . & . - & (7)- & (8)- & (9)- & (10)+8(11)+k = & -3.24 \\
+(0)+ & (1)+ & (2)+ & (3)+ & (4)+ & (5)+ & (6)+ & (7)+ & (8)+ & (9)+ & (10)+ & (11) . = & 0
\end{array}$$

Addirt man die ersten 12 Gleichungen dieses Systems, so folgt

$$(11) \qquad 12k = 0 \quad k = 0.$$

Da es uns nicht auf Gewichtsberechnung ankommt, so wandeln wir nun das System zu bequemerer Ermittlung der Unbekannten um, indem wir zu jeder der 12 ersten Gleichungen die letzte addiren; das giebt:

$$\begin{aligned} 9(0) + (5) + (6) + (7) &= -\ 5.96 \\ (12) \qquad 9(1) + (6) + (7) + (8) &= -\ 12.53 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}$$

oder behufs indirecter Auflösung (vergl. §. 18. II. S. 133):

$$(0) = -0.662 - \frac{(5)+(6)+(7)}{9}$$

$$(1) = -1.392 - \frac{(6)+(7)+(8)}{9}$$

$$(2) = -1.056 - \frac{(7)+(8)+(9)}{9}$$

$$(3) = -0.146 - \frac{(8)+(9)+(10)}{9}$$

$$(4) = +0.141 - \frac{(9)+(10)+(11)}{9}$$

$$(5) = +1.012 - \frac{(10)+(11)+(0)}{9}$$

(13)
$$(6) = +0.716 - \frac{(11)+(0)+(1)}{9}$$

$$(7) = +0.449 - \frac{(0)+(1)+(2)}{9}$$

$$(8) = +0.543 - \frac{(1)+(2)+(3)}{9}$$

$$(9) = +0.523 - \frac{(2)+(3)+(4)}{9}$$

$$(10) = +0.232 - \frac{(3)+(4)+(5)}{9}$$

$$(11) = -0.360 - \frac{(4)+(5)+(6)}{9}$$

Zur Controlle dient der Umstand, dass die Summe dieser Unbekannten gleich Null sein muss für jedes rechter Hand eingeführte und der Gl. (9) genügende Werthsystem. Nehmen wir als erste Näherungswerthe der Theilungsfehler die Zahlen rechter Hand, deren Summe in der That Null ist, und führen dieselben für (0) (1) ... (11) rechter Hand ein, so erhalten wir als Verbesserungen der ersten Näherungswerthe:

(14)

(0)	− 0.242	(6)	+ 0.268	Summe gleich Null.
(1)	− 0.190	(7)	+ 0.346	
(2)	− 0.168	(8)	+ 0.288	
(3)	− 0.144	(9)	+ 0.118	
(4)	− 0.044	(10)	− 0.112	
(5)	+ 0.088	(11)	− 0.208	

Speciellere Controlle hat man noch dadurch, dass die Summen der Verbesserungen für (0.3.6.9), (1.4.7.10), (2.5.8.11),

einzeln Null sein müssen, wie ein Blick auf die Gleichungen lehrt. Führen wir nun die erhaltenen Verbesserungen ein in die Gleichungen (13), so erhalten wir die weitern Verbesserungen:

(15)

(0)	− 0.077	(6)	+ 0.071	Summe gleich Null.
(1)	− 0.100	(7)	+ 0.066	
(2)	− 0.084	(8)	+ 0.056	
(3)	− 0.033	(9)	+ 0.040	
(4)	+ 0.022	(10)	+ 0.011	
(5)	+ 0.062	(11)	− 0.035	

und daraus weitere Verbesserungen:

(16)

(0)	− 0.022	(6)	+ 0.024	Summe gleich Null.
(1)	− 0.022	(7)	+ 0.029	
(2)	− 0.018	(8)	+ 0.024	
(3)	− 0.012	(9)	+ 0.011	
(4)	− 0.002	(10)	− 0.006	
(5)	+ 0.011	(11)	− 0.017	

und damit endlich:

(17)

(0)	− 0.007	(6)	+ 0.007	Summe gleich Null.
(1)	− 0.009	(7)	+ 0.007	
(2)	− 0.007	(8)	+ 0.007	
(3)	− 0.003	(9)	+ 0.004	
(4)	+ 0.001	(10)	+ 0.000	
(5)	+ 0.005	(11)	− 0.004	

Im Ganzen sind daher die Theilungsfehler:

(18)

(0) = − 1.01_0	(6) = + 1.08_6	
(1) = − 1.71_3	(7) = + 0.89_7	Summe
(2) = − 1.33_3	(8) = + 0.91_8	+ 5.017 − 5.018
(3) = − 0.33_8	(9) = + 0.69_6	
(4) = + 0.11_8	(10) = + 0.12_4	
(5) = + 1.17_8	(11) = − 0.62_4	

Damit ergeben sich die Verbesserungen der Beobachtungen wie folgt:

(19)

λ	λ'	λ''	λ'''
+ 0.19	+ 0.11	+ 0.25	— 0.20
+ 0.01	— 0.04	— 0.07	— 0.39
— 0.17	— 0.09	+ 0.37	— 0.13
+ 0.03	+ 0.01	— 0.05	— 0.03
+ 0.34	— 0.06	+ 0.02	+ 0.28
— 0.26	+ 0.18	— 0.34	+ 0.56
— 0.20	— 0.05	+ 0.03	+ 0.08
+ 0.06	— 0.05	+ 0.30	— 0.24
+ 0.05	— 0.24	+ 0.35	+ 0.06
+ 0.02	— 0.03	— 0.24	+ 0.14
— 0.21	+ 0.13	— 0.23	+ 0.11
+ 0.14	+ 0.13	— 0.35	— 0.24
+ 0.84	+ 0.56	+ 1.32	+ 1.23
— 0.84	— 0.56	— 1.28	— 1.23

Hieraus folgt $[\lambda\lambda] = 2.043$ in hinreichender Uebereinstimmung mit der Berechnung nach §. 24. (13). Ferner ist

(20)
$$\mu = \mp\sqrt{\frac{2.043}{48 - 16 + 1}} = \mp 0.25$$
$$\mu_\lambda = \mp\sqrt{\frac{2.043}{48}} = \mp 0.21$$

(21)
$$\vartheta = \mp\frac{7.86}{\sqrt{33.48}} = \mp 0.20$$
$$\mu : \vartheta = 1.26.$$

Die Vertheilung der λ entspricht sehr nahe der III. Form des Fehlergesetzes, denn es sind

25 der λ positiv, 23 dagegen negativ } $[\lambda]$ nothwendig
Quadrats. d. pos. $\lambda = 1.1041$, der neg. $\lambda = 0.9385$ } gleich Null

31 der λ oder 0.65 aller λ sind $< \mu_\lambda$
24 der λ oder 0.50 „ λ „ $< 0.674\,\mu_\lambda$.

Der mittlere Unterschied von ε und λ ist $\mu\sqrt{\frac{15}{48}}$ d. i. $\mp 0''.14$ und daher zu erwarten, dass auch das Gesetz der wahren Fehler die genannte Form habe, die Ausgleichungsresultate mithin wahrscheinlichste Werthe sind — (abgesehen von dem hier nicht wahrscheinlichen Ausnahmefalle §. 29. I. (12)).

Die reciproken Gewichte der Unbekannten kann man in derselben Weise durch successive Annäherung wie diese selbst finden und zwar ist leicht zu erkennen, dass sie alle gleich sind. Es wird der mittlere Fehler in der Bestimmung eines Theilungsfehlers

$$\mp\sqrt{0.0619 \times 0.1086} \text{ d. i. } \mp 0''.082.$$

Der periodische Charakter der Theilungsfehler (18) ist nicht zu verkennen; um denselben möglichst zur Geltung zu bringen, hat der Beobachter bei den Messungen die zufälligen Theilungsfehler dadurch möglichst eliminirt, dass immer drei Striche nebeneinander eingestellt und aus den drei Ablesungen das Mittel genommen wurden.

Hat man die Absicht, die einzelnen Theilungsfehler selbst kennen zu lernen und nicht blos, wie in diesem Beispiele, die arithmetischen Mittel diametraler Striche, so muss man die Methoden dieses und des folgenden Beispiels combiniren und schon in der Ausgleichung die dem periodischen Theilungsfehler entsprechende periodische Function einführen.

Beispiel 28. Die Bestimmung der Excentricität der Alhidade und eines mittlern Werthes der Theilungsfehler eines Kreises mit mikroskopischer Ablesung erfolgt durch Ermittlung der Differenzen der Angaben zweier diametralen Mikroskopmikrometer für verschiedene möglichst gleichmässig über den Kreis vertheilte Durchmesser.

Wir geben beispielsweise in Folgendem die Ergebnisse zweier von verschiedenen Beobachtern angestellten Versuchsreihen. Es sind die um 180^0 verminderten Differenzen ausgedrückt in Mikrometertheilen des Mikroskops II, deren jeder 2.4 Bogensecunden enthält; der Nullpunkt von I wurde genau auf den betreffenden Theilstrich eingestellt.

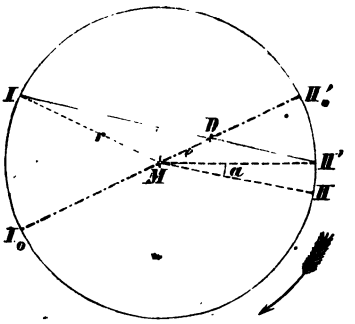
Tableau (1)

Mikr. I. auf	II — I — 180°		
	1. Reihe	2. Reihe	Mittel = l
0°	+ 19.3	+ 19.7	+ 19.5
10	+ 17.0	+ 18.0	+ 17.5
20	+ 16.0	+ 15.5	+ 15.8
30	+ 16.0	+ 15.0	+ 15.5
40	+ 11.0	+ 11.0	+ 11.0
50	+ 6.0	+ 7.5	+ 6.8
60	+ 10.5	+ 9.0	+ 9.8
70	+ 10.5	+ 9.5	+ 10.0
80	+ 5.0	+ 6.0	+ 5.5
90	— 3.0	— 4.0	— 3.5
100	— 6.5	— 6.0	— 6.3
110	— 14.5	— 13.0	— 13.8
120	— 17.0	— 17.0	— 17.0
130	— 17.0	— 16.0	— 16.5
140	— 23.0	— 21.0	— 22.0
150	— 18.0	— 16.5	— 17.3
160	— 19.5	— 17.5	— 18.5
170	— 18.5	— 18.0	— 18.3
180	— 21.5	— 19.0	— 20.3
190	— 15.5	— 13.0	— 14.3
200	— 17.0	— 18.0	— 17.5
210	— 14.0	— 14.0	— 14.0
220	— 16.0	— 14.0	— 15.0
230	— 9.5	— 10.0	— 9.8
240	— 15.0	— 12.5	— 13.8
250	— 12.5	— 12.0	— 12.3
260	— 11.5	— 9.5	— 10.5
270	+ 2.0	+ 0.5	+ 1.3
280	+ 2.5	+ 6.0	+ 4.3
290	+ 14.0	+ 12.5	+ 13.3
300	+ 14.0	+ 14.0	+ 14.0
310	+ 14.5	+ 15.5	+ 15.0
320	+ 22.5	+ 23.0	+ 22.8
330	+ 20.5	+ 20.0	+ 20.3
340	+ 22.0	+ 22.5	+ 22.3
350	+ 19.5	+ 20.0	+ 19.8

Diese Differenzen sind nun Functionen der Excentricität der Alhidade, des sogen. Abstands der Mikroskope und der Theilungsfehler. Seien in der Figur: M der Mittelpunkt des Kreises, D der Drehpunkt, I und II die Nullpunkte der Mikrometer, e die Excentricität MD, r der Radius des Kreises, sei ferner $IDII'$ eine Gerade und der Abstand der Mikroskope

(2) $$\sphericalangle\, II'MII = a,$$

positiv gemessen in Richtung wachsender Theilung (des Pfeiles). Alsdann ist die Ablesungsdifferenz



(3) $$II - I = a + II' - I.$$

Nehmen wir diejenige Stellung der Alhidade zu Hülfe, wo die Verbindungslinie des Nullpunktes I_0 mit M auch D enthält, nämlich I_0MDII_0', so folgt

(4) $$II' - I = 180^0 - \sphericalangle\, I_0MI + \sphericalangle\, II_0'MII'$$

und da nun

$$\sphericalangle\, I_0MI = \sphericalangle\, I_0DI + 206265\,\frac{e}{r}\sin I_0DI \text{ Bogensec.}$$

$$\sphericalangle\, II_0'MII' = \sphericalangle\, II_0'DII' - 206265\,\frac{e}{r}\sin II_0'DII' \quad ,,$$

so ist wegen

$$\sphericalangle\, I_0DI = \sphericalangle\, II_0'DII'$$

aus (3) und (4)

$$II - I = 180^0 + a - 206265\,\frac{2e}{r}\sin I_0\,DI.$$

Vertauscht man hierin $\sphericalangle\, I_0DI$ mit $\sphericalangle\, I_0MI$ oder der Differenz der Ablesungen I und I_0, so ist weiter mit genügender Annäherung

(5) $$II - I = 180^0 + a - 206265\,\frac{2e}{r}\sin(I - I_0)$$

oder

$$II - I = 180^0 + a - b\sin I + c\cos I$$

(6) $$b = 206265\,\frac{2e}{r}\cos I_0 \text{ Bogensec.}$$

$$c = 206265\,\frac{2e}{r}\sin I_0 \quad ,,$$

b und c bestimmen Grösse und Richtung der Excentricität.

Die 1. Gl. (6) ist wegen der Theilungsfehler und zufälligen Beobachtungsfehler noch nicht correct; sie wird es erst, wenn wir setzen für

$$II - I \ldots . (II + t'') - (I + t') + \varepsilon$$

und daher

(7) $\varepsilon + (t'' - t') = -(II - I - 180^0) + a - b \sin I + c \cos I$

worin t'' und t' die Theilungsfehler für die Ablesestellen II und I bedeuten, ε aber den zufälligen Beobachtungsfehler der Differenz $II - I$ bezeichnet. Tabl. (1) enthält die Werthe

(7*). $$l = II - I - 180^0$$

und denken wir uns die zugehörigen Gleichungen (7) aufgestellt, so bemerken wir, dass je zwei derselben, welche um 180^0 verschiedenen Ablesungen von I entsprechen, dieselben Theilungsfehler enthalten. Unterscheiden wir die beiden Fälle durch Indices 1 und 2, so haben wir nämlich:

(8)
$$\varepsilon_1 + (t_1'' - t_1') = -l_1 + a - b \sin I_1 + c \cos I_1$$
$$\varepsilon_2 - (t_1'' - t_1') = -l_2 + a + b \sin I_1 - c \cos I_1$$

und hieraus folgt durch Addition

(9) $$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = -(l_1 + l_2) + 2a$$

(10) $$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2(t_1'' - t_1')) = -(l_1 - l_2) - 2b \sin I_1 + 2c \cos I_1.$$

Da jede der Gl. (10) andere Theilungsfehler enthält, ist deren Trennung von den zufälligen Fehlern ε nicht möglich. Wir bezeichnen demgemäss die linken Seiten der Gleichungen (9) und (10) für die Ausgleichung mit den resp. Symbolen v und v' und erhalten dann für unsern Fall die Fehlergleichungen wie folgt:

(9*)
$$v_0 = +0.8 + 2a$$
$$v_1 = -3.2 + 2a$$
$$v_2 = +1.7 + 2a$$
$$v_3 = -1.5 + 2a$$
$$v_4 = +4.0 + 2a$$
$$v_5 = +3.0 + 2a$$
$$v_6 = +4.0 + 2a$$

$$
\begin{aligned}
v_7 &= +2.3 + 2a \\
v_8 &= +5.0 + 2a \\
v_9 &= +2.2 + 2a \\
v_{10} &= +2.0 + 2a \\
v_{11} &= +0.5 + 2a \\
v_{12} &= +3.0 + 2a \\
v_{13} &= +1.5 + 2a \\
v_{14} &= -0.8 + 2a \\
v_{15} &= -3.0 + 2a \\
v_{16} &= -3.8 + 2a \\
v_{17} &= -1.5 + 2a
\end{aligned}
\qquad (9^*)
$$

$$
\begin{aligned}
v_0' &= -39.8 \qquad\qquad + 1.000(2c) \\
v_1' &= -31.8 - 0.174(2b) + 0.985(2c) \\
v_2' &= -33.3 - 0.342(2b) + 0.940(2c) \\
v_3' &= -29.5 - 0.500(2b) + 0.866(2c) \\
v_4' &= -26.0 - 0.643(2b) + 0.766(2c) \\
v_5' &= -16.6 - 0.766(2b) + 0.643(2c) \\
v_6' &= -23.6 - 0.866(2b) + 0.500(2c) \\
v_7' &= -22.3 - 0.940(2b) + 0.342(2c) \\
v_8' &= -16.0 - 0.985(2b) + 0.174(2c) \\
v_9' &= +4.8 - 1.000(2b) \\
v_{10}' &= +10.6 - 0.985(2b) - 0.174(2c) \\
v_{11}' &= +27.1 - 0.940(2b) - 0.342(2c) \\
v_{12}' &= +31.0 - 0.866(2b) - 0.500(2c) \\
v_{13}' &= +31.5 - 0.766(2b) - 0.643(2c) \\
v_{14}' &= +44.8 - 0.643(2b) - 0.766(2c) \\
v_{15}' &= +37.6 - 0.500(2b) - 0.866(2c) \\
v_{16}' &= +40.8 - 0.342(2b) - 0.940(2c) \\
v_{17}' &= +38.1 - 0.174(2b) - 0.985(2c)
\end{aligned}
\qquad (10^*)
$$

Das System (9*) bestimmt nur die Unbekannte a, das System (10*) bestimmt dagegen nur die beiden andern Unbekannten b und c, es ist also kein Zusammenhang in der Ausgleichung beider Systeme. Man erhält nun mit Rück-

sicht darauf, dass in jedem der Systeme für sich die Fehlergleichungen als gleich genau anzusehen sind, die Normalgleichungen:

		Mikrometertheile II
(11)	$18(2a) = -16.2$	$2a = -0.90$
(12)	$9(2b) \quad . \quad = +41.6$	$2b = +4.62$
	$. \quad 9(2c) = +370.4$	$2c = +41.16$

Dieselben Werthe würde die Ausgleichung des Systems (7) ergeben haben unter der Bedingung, dass die Summe der Quadrate der linken Seiten ein Minimum werde, wobei nur an Stelle des wahren Fehlers $\varepsilon + (t'' - t')$ ein plausibelster Fehler zu setzen gewesen wäre.

Führt man die Werthe der Unbekannten in (9* u. 10*) ein, so ergeben sich die v und v' wie folgt:

(13)

Nr.	v	v'	Nr.	v	v'
0	−0.1	+1.3	9	+1.3	+0.2
1	−4.1	+7.9	10	+1.1	−1.1
2	+0.8	+3.8	11	−0.4	+8.7
3	−2.4	+3.8	12	+2.1	+6.4
4	+3.1	+2.5	13	+0.6	+1.5
5	+2.1	+6.3	14	−1.7	+10.3
6	+3.1	−7.0	15	−3.9	−0.3
7	+1.4	−12.6	16	−4.7	+0.6
8	+4.1	−13.4	17	−2.4	−3.2

(14) $$[vv] = 119.40 \quad [v'v'] = 763.17.$$

Hiernach ist das mittlere Quadrat von $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ gleich

$$\frac{119.40}{18-1} \text{ d. i. } 7.02$$

und das mittlere Quadrat von $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2(t_1'' - t_1'))$ gleich

$$\frac{763.17}{18-2} \text{ d. i. } 47.70.$$

Nennen wir nun den mittlern Werth eines $\varepsilon \ldots \mu$ und den mittlern Werth einer Differenz $(t_1'' - t_1') \ldots \Delta$, so ist das mittlere Quadrat von $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ auch gleich $2\mu^2$ und das

mittlere Quadrat von $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2(t_1'' - t_1'))$, wenn nur wenigstens die ε einen zufälligen Charakter haben, gleich $2\mu^2 + 4\Delta^2$, daher

(15) $2\mu^2 = 7.02 \qquad 2\mu^2 + 4\Delta^2 = 47.70$

also auch

(16) $\mu^2 = 3.51 \qquad \mu = \mp 1.87$ Mikrometertheile II

(17) $\Delta^2 = 10.17 \qquad \Delta = \mp 3.19$ „ „

Der mittlere Werth eines einzelnen Theilungsfehlers ist annäherungsweise $\Delta\sqrt{2}$.

Betrachtet man Tabl. (13), so sieht man sofort, dass v sowohl wie v' von zufälligen Fehlern allein nicht abstammen können. Was v' anlangt, so ist dies nicht befremdlich, weil in den v' die Differenzen $(t'' - t')$ enthalten sind; dagegen war es nicht zu erwarten, dass auch die v einen Zusammenhang mit der Bezifferung des Kreises zeigen würden, wenigstens sobald die v nur von den Einstellungs- und Ablesefehlern an den Mikrometern herrühren, wie wir bisher annahmen. Dass dies aber nicht der Fall ist, zeigt ferner auch eine Berechnung von μ aus der Vergleichung der correspondirenden Werthe in den beiden Reihen Tabl. (1): Die Quadratsumme der 36 Unterschiede ist 70.91 und daher das Quadrat eines einzelnen im Mittel 1.96. Ist nun ν der mittlere Beobachtungsfehler einer Angabe, so ist $2\nu^2$ das mittlere Quadrat eines Unterschieds zweier Angaben, also

(18) $2\nu^2 = 1.96.$

Andrerseits ist $\frac{\nu^2}{2}$ das mittlere Fehlerquadrat eines arithmetischen Mittels zweier Angaben, also auch

(19) $\frac{\nu^2}{2} = \mu^2$

und daraus folgt

(20) $\mu^2 = 0.49 \quad \mu = \mp 0.70$

erheblich von (16) abweichend. Wenn wir nun annehmen können, dass die Angaben der Mikrometer gehörig reducirt und die abgelesenen Striche immer in identischer Weise